

Gelanggang bersih dan perluasannya

Ahmad Adil Aunillah¹⁾ dan Santi Irawati²⁾

Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Malang

Email: Oniel_boy@yahoo.com, santira99@gmail.com

ABSTRAK: Misalkan R adalah suatu gelanggang dengan unsur satuan 1. Suatu unsur $r \in R$ disebut bersih jika $r = u + e$, untuk suatu unit u di R dan suatu idempoten e di R . R disebut gelanggang bersih jika setiap unsurnya adalah bersih. Gelanggang R disebut n -gelanggang bersih jika setiap unsur di R dapat dinyatakan sebagai penjumlahan idempoten dan n unit di R . Misalkan $C(R)$ adalah pusat gelanggang R dan $g(x)$ adalah polinom di pusat $C(R)[x]$. Suatu unsur r di R disebut $g(x)$ -bersih jika $r = u + s$, di mana u adalah unit di R dan $g(s) = 0$. Selanjutnya R disebut $g(x)$ -gelanggang bersih jika setiap unsurnya adalah $g(x)$ -bersih. Suatu unsur x di R disebut $(n, g(x))$ -bersih jika $x = u_1 + u_2 + \dots + u_n + s$, di mana u_1, u_2, \dots, u_n adalah unit di R dan $g(s) = 0$. Selanjutnya gelanggang R disebut $(n, g(x))$ -gelanggang bersih jika setiap unsurnya $(n, g(x))$ -bersih. Dalam artikel ini akan mengkaji beberapa gelanggang bersih, sifat-sifatnya, dan perluasannya.

Kata Kunci: gelanggang bersih, n -gelanggang bersih, $g(x)$ -gelanggang bersih, $(n, g(x))$ -gelanggang bersih.

Gelanggang yaitu suatu himpunan disertai dengan dua operasi biner (operasi penjumlahan dan operasi perkHandaman) yang memenuhi syarat-syarat tertentu. Nicholson (1977) memperkenalkan konsep gelanggang bersih sebagai suatu gelanggang yang setiap unsurnya bersih, yaitu dapat dinyatakan sebagai jumlah dari suatu unsur idempoten dan unit di gelanggang tersebut. Lebih lanjut dalam perkembangannya, didefinisikan n -gelanggang bersih, yaitu suatu gelanggang yang sebarang unsurnya dapat dinyatakan sebagai jumlah dari idempoten dan n unit dari gelanggang tersebut. Dikaitkan dengan konsep gelanggang polinomial, didefinisikan $g(x)$ -gelanggang bersih R sebagai suatu gelanggang yang sebarang unsurnya dapat dinyatakan sebagai jumlah dari unit dan suatu $s \in R$, dengan $g(s) = 0$ untuk suatu $g(x) \in C(R)[x]$, di mana

$$C(R) := \{x \in R \mid xr = rx, \forall r \in R\}$$

adalah pusat dari R .

Pembahasan mengenai n -gelanggang bersih dan $g(x)$ -gelanggang bersih dikembangkan menjadi konsep $(n, g(x))$ -gelanggang bersih.

Artikel ini akan dimulai dengan notasi berkaitan dengan gelanggang bersih. Selanjutnya akan dibahas definisi-definisi, proposisi, lemma yang merupakan hasil utama dari tulisan ini. Artikel ini ditutup dengan kesimpulan dan masalah terbuka yang dapat dikembangkan untuk penelitian selanjutnya.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Dalam artikel ini, $U(R)$ adalah grup dari unit-unit, $\sqrt{0}$ adalah nilradical, $Id(R)$ adalah himpunan dari idempoten-idempoten, dan $J(R)$ adalah radikal Jacobson.

1) Mahasiswa progam studi matematika

2) Dosen pembimbing

Definisi 1 Unsur Bersih dan Gelanggang Bersih (Handam, 2009:1007)

Misalkan R suatu gelanggang dengan satuan. Suatu unsur r di R disebut unsur bersih jika r dapat dinyatakan sebagai jumlah dari suatu unsur idempoten dan unit di R . Gelanggang R adalah gelanggang bersih jika setiap unsur di R adalah unsur bersih.

Contoh 1 Misalkan p adalah prima. \mathbb{Z}_p adalah gelanggang bersih.

Definisi 2 Unsur Periodik (Handam, 2009:1009)

Suatu unsur $x \in R$ disebut periodik jika ada bilangan bulat n, m dengan $n > m \geq 1$ sedemikian sehingga $x^n = x^m$.

Contoh 2 $-1, 0$, dan 1 merupakan unsur periodik di gelanggang \mathbb{Z} .

Lemma 1 (Handam, 2009:1009)

Setiap unsur periodik di gelanggang R adalah bersih.

Bukti: Lihat Handam (2009).

Proposisi 1 (Han dan Nicholson, 2001:2589)

Setiap unsur idempoten di gelanggang R adalah bersih.

Bukti:

Ambil sebarang unsur idempoten $e \in R$, maka

$$e = (1 - e) + (2e - 1)$$

Karena $1 - e$ adalah unsur idempoten dan $2e - 1$ adalah unit

Maka e adalah bersih.

Proposisi 2 (Han dan Nicholson, 2001:2589)

Sebarang unsur unit di gelanggang R adalah bersih.

Bukti:

Ambil sebarang unit $u \in R$

$$u = u + 0, 0 \in Id(R); u \in U(R)$$

Maka u adalah unsur bersih.

Proposisi 3 (Han dan Nicholson, 2001:2589)

Misalkan $a \in R$, a bersih jika dan hanya jika $1 - a$ bersih.

Bukti:

Ambil sebarang unsur bersih $a \in R$

Akibatnya, $a = e + u$, untuk suatu $e \in Id(R)$ dan $u \in U(R)$

$$1 - a = 1 - (e + u)$$

$$= 1 - e - u$$

$$= 1 - e + (-u)$$

Diperoleh $1 - e \in Id(R)$

Karena $1 - e \in Id(R)$ dan $-u \in U(R)$, maka $1 - a$ adalah bersih.

Selanjutnya, karena $1 - a$ adalah bersih, maka $1 - a = e + u$, dengan $e \in Id(R)$ dan $u \in U(R)$

Perhatikan bahwa

$$1 - a = e + u$$

$$a = 1 - e - u, \text{ dengan } 1 - e \in Id(R) \text{ dan } -u \in U(R)$$

Maka a adalah bersih.

Definisi 3 n -gelanggang Bersih (Handam, 2009:1007)

Misalkan $n \in \mathbb{N}$. Suatu gelanggang R disebut n -gelanggang bersih jika setiap unsur dari R dapat ditulis sebagai jumlah dari suatu idempoten dan n unit.

Contoh 3

\mathbb{Z}_3 adalah gelanggang bersih yang mempunyai idempoten $\bar{0}$ dan $\bar{1}$, serta unit di \mathbb{Z}_3 adalah $\bar{1}$ dan $\bar{2}$. \mathbb{Z}_3 adalah 2-gelanggang bersih, sebab

$$\bar{0} = \bar{1} + \bar{1} + \bar{1} = \bar{1} + 2\bar{1}$$

$$\bar{1} = \bar{0} + \bar{2} + \bar{2} = \bar{0} + 2\bar{2}$$

$$\bar{2} = \bar{1} + \bar{2} + \bar{2} = \bar{1} + 2\bar{2}$$

Jadi, \mathbb{Z}_3 adalah 2-gelanggang bersih.

Keterangan: Jika R adalah gelanggang bersih, maka R adalah 1-gelanggang bersih.

Definisi 4 $g(x)$ -gelanggang bersih (Handam, 2009:1007)

Misalkan R adalah suatu gelanggang. Didefinisikan

$$C(R) := \{x \in R \mid xr = rx, \forall r \in R\}$$

Dan disebut pusat dari gelanggang R , dan misal $g(x)$ adalah suatu polinom tetap di $C(R)[x]$. Suatu unsur $r \in R$ dikatakan $g(x)$ -bersih, jika $r = u + s$, untuk suatu $u \in U(R)$ dan $g(s) = 0$. Gelanggang R disebut $g(x)$ -gelanggang bersih jika setiap unsur di R adalah $g(x)$ -bersih.

Contoh 4

Sebarang gelanggang bersih R merupakan suatu $(x^2 - x)$ -gelanggang bersih.

Definisi 5 $(n, g(x))$ -gelanggang Bersih (Handam, 2009:1008)

Misalkan n suatu bilangan bulat positif dan misal $g(x)$ suatu polinom tetap di $C(R)[x]$. Suatu unsur $\alpha \in R$ disebut $(n, g(x))$ -bersih jika $\alpha = u_1 + u_2 + \dots + u_n + s$, di mana u_1, u_2, \dots, u_n adalah unit-unit di R dan $g(s) = 0$. Suatu gelanggang disebut $(n, g(x))$ -gelanggang bersih jika setiap unsur di R adalah $(n, g(x))$ -bersih.

Contoh 5

1. Diketahui gelanggang matrik segitiga atas

$$R := \left\{ \begin{bmatrix} \bar{a} & \bar{b} & \bar{c} \\ \bar{0} & \bar{d} & \bar{e} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{f} \end{bmatrix} \mid \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}, \bar{e}, \bar{f} \in \mathbb{Z}_2 \right\}.$$

Maka $\begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \end{bmatrix}$ adalah unsur $(2, x^2 + x^3)$ -bersih

Bukti:

Perhatikan bahwa $\begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \end{bmatrix}$ merupakan unit di R sebab $\begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \end{bmatrix}$ adalah unsur satuan di R .

Dan $\begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \end{bmatrix}$ juga merupakan unit di R sebab ada $\begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \end{bmatrix}$ sehingga

$$\begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \end{bmatrix}$$

Selanjutnya, misalkan $g(x) = x^2 + x^3 \in C(R)[x]$

$$g\left(\begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \end{bmatrix}^2 + \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix}$$

Karena

$$\begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \end{bmatrix}$$

Maka

$$\begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \end{bmatrix} \text{ adalah } (2, x^2 + x^3)\text{-bersih.}$$

2. \mathbb{Z}_3 adalah $(1, x^2 - x)$ -gelanggang bersih

Pemilihan polinom $g(x)$ adalah tidak tunggal, dapat juga dipilih polinom-polinom lain dengan memperhatikan sifat unsur idempoten. Misalnya, $g(x) = x^3 - x$ atau $g(x) = x^4 - x^2$.

Selanjutnya, sebarang gelanggang bersih R adalah $(1, x^2 - x)$ -gelanggang bersih dan sebarang n -gelanggang bersih R adalah $(n, x^2 - x)$ -gelanggang bersih.

Proposisi 4 (Handam, 2009:1008)

Misalkan $g(x)$ suatu polinom di $C(R)[x]$. Dua kondisi berikut adalah ekuivalen:

- (1) Setiap unsur $\alpha \in R$ punya bentuk $\alpha = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + s$, di mana $g(s) = 0$ dan $u_1, u_2, \dots, u_n \in U(R)$.
- (2) Setiap unsur $\alpha \in R$ punya bentuk $\alpha = u_1 + u_2 + \cdots + u_n - s$, di mana $g(s) = 0$ dan $u_1, u_2, \dots, u_n \in U(R)$.

Bukti:

(1) \Rightarrow (2) Ambil sebarang $\alpha \in R$, akibatnya $-\alpha \in R$

$$-\alpha = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + s, \text{ di mana } u_i \in U(R) \text{ dan } g(s) = 0$$

$$\alpha = (-u_1) + (-u_2) + \cdots + (-u_n) + (-s)$$

$$= (-u_1) + (-u_2) + \cdots + (-u_n) - s, \text{ di mana } (-u_i) \in U(R) \text{ dan } g(s) = 0.$$

(2) \Rightarrow (1) Ambil sebarang $\alpha \in R$, akibatnya $-\alpha \in R$

$$-\alpha = u_1 + u_2 + \cdots + u_n - s, \text{ di mana } u_i \in U(R) \text{ dan } g(s) = 0$$

$$\alpha = -(u_1 + u_2 + \cdots + u_n - s)$$

$$= (-u_1) + (-u_2) + \dots + (-u_n) + s, \text{ di mana } (-u_i) \in U(R) \text{ dan } g(s) = 0.$$

Proposisi 5 (Handam, 2009:1009)

Misalkan n, m adalah dua bilangan bulat positif, $m > 1$. Jika gelanggang R adalah $(n, x^m - x)$ -gelanggang bersih, maka R adalah $(n + 1)$ -gelanggang bersih.

Bukti :

Ambil sebarang $r \in R$

Karena R adalah $(n, x^m - x)$ -gelanggang bersih, maka $r = u_1 + u_2 + \dots + u_n + s$, di mana $u_i \in U(R)$, dengan $i = 1, 2, 1, \dots, n$ dan $g(s) = s^m - s = 0$.

Karena $s^m = s$ maka s unsur periodik di R .

Berdasarkan Lemma 1, s adalah suatu unsur bersih

Akibatnya, $s = v + e$, untuk suatu $v \in U(R)$ dan $e \in Id(R)$

Oleh karena itu

$$\begin{aligned} r &= u_1 + u_2 + \dots + u_n + s \\ &= u_1 + u_2 + \dots + u_n + v + e \end{aligned}$$

di mana $u_i, v \in U(R)$ dan $e \in Id(R)$. Karena ada $n + 1$ unsur unit, berarti R adalah $(n + 1)$ -gelanggang bersih.

Untuk sebarang bilangan bulat positif n , misal $U_n(R)$ dinotasikan sebagai himpunan dari unsur-unsur dari R yang dapat ditulis sebagai suatu jumlah yang tidak lebih dari n unit-unit dari R .

Proposisi 6 (Handam, 2009:1009)

Misalkan n, m adalah dua bilangan bulat positif dan

$$g(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0, \text{ dengan } a_0 \in U(R).$$

Jika R adalah suatu $(n, g(x))$ -gelanggang bersih, maka $R = U_{n+1}(R)$.

Bukti :

Jelas $U_{n+1}(R) \subseteq R$

Akan dibuktikan $R \subseteq U_{n+1}(R)$

Ambil sebarang $p \in R$, akan ditunjukkan bahwa $p \in U_{n+1}(R)$

Karena $p \in R$, maka $p = u_1 + u_2 + \dots + u_n + s$, di mana $u_i \in U(R)$, untuk $i = 1, 2, \dots, n$ dan $g(s) = a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0$

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_1 s + a_0 &= 0 \\ s(a_m s^{m-1} + a_{m-1} s^{m-2} + \dots + a_1) &= -a_0 \in U(R) \end{aligned}$$

Selanjutnya, misal $b := a_m s^{m-1} + a_{m-1} s^{m-2} + \dots + a_1$,

didapat

$$sb = -a_0 \in U(R)$$

Karena $sb \in U(R)$, maka ada $x \in R$ sehingga

$$(sb)x = x(sb) = 1,$$

yang mengakibatkan $(xb)s = s(xb) = 1$, dan berarti xb adalah invers dari s

Jadi, $s \in U(R)$. Sehingga $p = u_1 + u_2 + \dots + u_n + s \in U_{n+1}(R)$

Dengan demikian, $R \subseteq U_{n+1}(R)$

Karena $U_{n+1}(R) \subseteq R$ dan $R \subseteq U_{n+1}(R)$, maka $R = U_{n+1}(R)$.

Proposisi 7 (Handam, 2009:1009)

Misalkan $f: R \rightarrow S$ adalah suatu epimorfisma gelanggang. Jika R adalah $(n, g(x))$ -gelanggang bersih, maka S adalah suatu $(n, h(g(x)))$ -gelanggang bersih, di mana h adalah suatu pemetaan dari $C(R)[x]$ ke $C(S)[x]$ didefinisikan oleh $h(\sum a_i x_i) = \sum f(a_i) x_i$.

Bukti :

Misalkan $g(x) := \sum_{i=0}^m a_i x^i \in C(R)[x]$, maka

$$h(g(x)) = h\left(\sum_{i=0}^m a_i x^i\right) = \sum_{i=0}^m f(a_i) x^i \in C(S)[x].$$

Ambil sebarang $p \in S$, maka ada $t \in R$ sehingga $f(t) = p$

Karena R adalah $(n, g(x))$ -gelanggang bersih, maka $t = u_1 + u_2 + \dots + u_n + d$, di mana $u_i \in U(R)$ dan $g(d) = 0_R$

Karena f homomorfisma, maka $f(0_R) = 0_S$

Sehingga

$$\begin{aligned} 0_S &= f(0_R) = f(g(d)) \\ &= f\left(\sum_{i=0}^m a_i d^i\right) \\ &= f(a_0) + f(a_1 d) + f(a_2 d^2) + \dots + f(a_m d^m) \\ &= f(a_0) + f(a_1) f(d) + f(a_2) f(d)^2 + \dots + f(a_m) f(d)^m \\ &= \sum_{i=0}^m f(a_i) (f(d))^i \\ &= h(g(f(d))) \end{aligned}$$

Selanjutnya,

$$\begin{aligned} p &= f(t) = f(u_1 + u_2 + \dots + u_n + d) \\ &= f(u_1) + f(u_2) + \dots + f(u_n) + f(d), \end{aligned}$$

Karena $u_i \in U(R)$ maka $f(u_i) \in U(S)$. Diperoleh

$$p = f(u_1) + f(u_2) + \dots + f(u_n) + f(d) \text{ dimana } f(u_i) \in U(S) \text{ dan } h(g(f(d))) = 0_S$$

Jadi, S adalah $(n, h(g(x)))$ -gelanggang bersih.

Teorema 1 (Handam, 2009:1010)

Misalkan $R[[x]]$ adalah gelanggang dari semua *formal power series* atas suatu gelanggang R atau dengan notasi himpunan

$$R[[x]] := \{\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \mid a_i \in R\}$$

Maka $R[[x]]$ adalah $g(x)$ -gelanggang bersih jika dan hanya jika R adalah $g(x)$ -gelanggang bersih.

Bukti:

Ambil sebarang $p \in R$, akibatnya p dapat ditulis

$$p = p + 0x + 0x^2 + \dots \in R[[x]]. \dots\dots(1)$$

Karena $R[[x]]$ adalah $g(x)$ -gelanggang bersih, maka

$$p = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i + s$$

untuk suatu $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \in U(R[[x]])$ dan $g(s) = 0 \dots \dots \dots (2)$

Dari (1) dan (2)

$$\begin{aligned} p + 0x + 0x^2 + \dots &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + s \\ p + 0x + 0x^2 + \dots &= (a_0 + s) + a_1x + a_2x^2 + \dots \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh

$$p = a_0 + s \text{ dan } a_j = 0, \text{ untuk } j = 1, 2, 3, \dots$$

Karena $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \in U(R[[x]])$, maka $a_0 \in U(R)$.

Jadi, R adalah $g(x)$ -gelanggang bersih.

Selanjutnya, ambil sebarang $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots \in R[[x]]$, dengan $a_i \in R$.

Karena R adalah $g(x)$ -gelanggang bersih, maka

$$a_0 = u + s, \text{ untuk suatu } u \in U(R) \text{ dan } g(s) = 0.$$

Sehingga

$$\begin{aligned} p(x) &= u + s + a_1x + a_2x^2 + \dots \\ &= (u + a_1x + a_2x^2 + \dots) + s \end{aligned}$$

Karena $u \in U(R)$, maka

$$u + a_1x + a_2x^2 + \dots \in U(R[[x]])$$

Jadi, $R[[x]]$ adalah $g(x)$ -gelanggang bersih.

Proposisi 8 (Handam, 2009:1010)

Misalkan n adalah suatu bilangan bulat positif. Gelanggang $R[[x]]$ adalah $(n, g(x))$ -gelanggang bersih jika dan hanya jika R adalah $(n, g(x))$ -gelanggang bersih.

Bukti:

Anggap $R[[x]]$ adalah $(n, g(x))$ -gelanggang bersih.

Berdasarkan teorema natural homomorfisma, maka pemetaan

$$\alpha: R[[x]] \rightarrow R[[x]] / (x)$$

dimana merupakan suatu epimorfisma gelanggang.

Akibatnya, berdasarkan Proposisi 7, $R[[x]] / (x)$ adalah $(n, g(x))$ -gelanggang bersih.

Senjutnya, anggap R adalah suatu $(n, g(x))$ -gelanggang bersih.

Misal $f = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \in R[[x]]$, maka

$$a_0 = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + s$$

dimana $g(s) = 0$ dan $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n$ adalah unit-unit di R .

Maka

$$f = a_0 + \sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i$$

$$\begin{aligned}
&= u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + s + \sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i \\
&= s + \left(u_1 + \sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i \right) + u_2 + u_3 + \cdots + u_n, \quad g(s) = 0, u_i \in U(R) \\
&\quad \subseteq U(R[[x]]) \quad (2 \leq i \leq n)
\end{aligned}$$

Karena $u_1 \in U(R)$ maka $u_1 + \sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i \in U(R[[x]])$

Jadi, $R[[x]]$ adalah $(n, g(x))$ -gelanggang bersih.

Proposisi 9 (Handam, 2009:1010)

Jika R adalah sebarang gelanggang komutatif dengan satuan, maka gelanggang polinom $R[x]$ bukan $(n, g(x))$ -gelanggang bersih.

Bukti:

Karena R adalah gelanggang komutatif dengan satuan,

$$U(R[x]) = \{a_0 + a_1x + \cdots + a_kx^k \mid a_0 \in U(R), a_1, a_2, \dots, a_k \in \sqrt{0}\}.$$

Andaikan x adalah $(n, g(x))$ -bersih, misalkan

$$\begin{aligned}
x &= (u_1 + a_{11}x + \cdots + a_{ak_1}x^{k_1}) + (u_2 + a_{21}x + \cdots + a_{ak_2}x^{k_2}) + \cdots + \\
&\quad (u_n + a_{n1}x + \cdots + a_{ak_n}x^{k_n}) + s,
\end{aligned}$$

di mana $g(s) = 0$, u_1, u_2, \dots, u_n adalah unit-unit di R dan $a_{ij} \in \sqrt{0} \subseteq J(R)$ ($1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq k_i$). Maka

$$1 = \sum_{i=1}^n a_{i1} \in J(R)$$

Hal ini kontradiksi.

Jadi, $R[x]$ bukan $(n, g(x))$ -gelanggang bersih.

PENUTUP

Dari pembahasan diatas, maka berikut adalah beberapa hasil-hasil .

1. Setiap unsur idempoten dan unit di gelanggang R adalah bersih.
2. Misalkan $a \in R$, a bersih jika dan hanya jika $1 - a$ bersih.
3. Misalkan n, m adalah dua bilangan bulat positif, $m > 1$. Jika gelanggang R adalah $(n, x^m - x)$ -gelanggang bersih, maka R adalah $(n + 1)$ -gelanggang bersih.
4. Misalkan n, m adalah dua bilangan bulat positif dan $g(x) = a_mx^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1x + a_0$, dengan $a_0 \in U(R)$. Jika R adalah suatu $(n, g(x))$ -gelanggang bersih, maka $R = U_{n+1}(R)$.
5. Misalkan $f: R \rightarrow S$ adalah suatu epimorfisma gelanggang. Jika R adalah $(n, g(x))$ -gelanggang bersih, maka S adalah suatu $(n, h(g(x)))$ -gelanggang bersih, di mana h adalah suatu pemetaan dari $C(R)[x]$ ke $C(S)[x]$ didefinisikan oleh $h(\sum a_i x_i) = \sum f(a_i) x_i$.

6. $R[[x]]$ adalah $g(x)$ -gelanggang bersih jika dan hanya jika R adalah $g(x)$ -gelanggang bersih.
7. Gelanggang $R[[x]]$ adalah $(n, g(x))$ -gelanggang bersih jika dan hanya jika R adalah $(n, g(x))$ -gelanggang bersih.
8. Jika R adalah sebarang gelanggang komutatif dengan satuan, maka gelanggang polinom $R[x]$ bukan $(n, g(x))$ -gelanggang bersih.

Karena dalam artikel ini hanya mengkaji macam-macam gelanggang bersih, sifat-sifat, dan perluasannya. Maka untuk peneliti selanjutnya menyarankan agar dikembangkan lebih jauh mengenai modul bersih.

DAFTAR RUJUKAN

- Ali H. Handam. 2009. $(n, g(x))$ -Clean Rings. *International Mathematical Forum*, 4, 2009, no. 21, 1007 – 1011.
- Camillo, V.P. dan J.J. Simón. 2002. The Nicholson-Varadarajan theorem on clean linear transformations, *Glasgow Mathematics Journal*. 44 (2002), 365-369.
- Fan, L. dan X. Yang. 2008. On rings whose elements are the sum of a unit and a root of a fixed polynomial, *Communications in Algebra*. 36 (2008), 269-278.
- Han, J. dan W. K. Nicholson. 2001. Extensions of clean rings, *Communications in Algebra*. 29 (2001), 2589-2595.
- Hungerford, Thomas W. 1974, *Algebra*. New York: Springer Verlag.
- Kheir. A.M. dan Al-Mallah. O. 2009. ON NIL-SEMI CLEAN RINGS*. *Jordan Journal Of Mathematics and Statistics (JJMS)*, 2(2). 2009, pp. 95-103.
- Nicholson, W.K. dan Y. Zhou. 2006. Endomorphisms that are the sum of a unit and a root of a fixed polynomial, *Canada Mathematics Bulletin*. 49 (2006), 265-269.
- Nicholson, W.K. 1977. Lifting idempotents and exchange rings, *Transcript American Mathematics Society*. 229 (1977), 269-278.
- Roman, S. 2005. *Graduate Text In Mathematics: Advance Linear Algebra*. New York: Springer.
- Sharifi, Yaghoub. 2010. (<http://ysharifi.wordpress.com/2010/09/02/units-in-polynomial-rings/>, online) diakses pada 21 Mei 2014.
- Xiao, G. dan W. Tong. 2006. n -Clean rings, *Algebra Colloquium*. 13: 4 (2006), 599-606.
- Xiao, G. dan W. Tong. 2003. n -clean rings and weakly unit stable range rings, *Communications in Algebra*. 33 (2003), 1501-1517.