Graph sederhana pembagi nol dari ring komutatif dengan satuan

Mohammad Sukkur dan I Made Sulandra

Jurusan Matematika

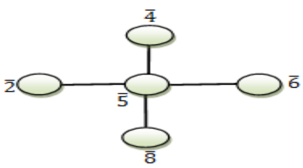
Universitas Negeri Malang

E-mail: msyukur738@gmail.com; made.sulandra.fmipa@um.ac.id

ABSTRAK: Misalkan R merupakan ring komutatif dengan unsur satuan. Berdasarkan unsur – unsur di R dan unsur – unsur pembagi nol di R, akan diperoleh suatu graph $\Gamma(\mathrm{R})$, dengan himpunan titiknya adalah $V(\Gamma(\mathrm{R})) = \mathrm{Z(R)}$ dimana $Z(R) = \{0 \neq \mathrm{x} \in \mathrm{R} | \mathrm{xy} = 0$, untuk suatu $0 \neq \mathrm{y} \in \mathrm{R}\}$ dan himpunan sisinya adalah $E(\Gamma(R)) = \{(x,y) | xy = 0, x, y \in Z(R)\}$ dimana $(x,y) = (y,x)$. Graph tersebut disebut graph pembagi nol. Jika himpunan sisi pada graph tersebut adalah $E(\Gamma(R)) = \{(x,y) | xy = 0, x, y \in Z(R), x \neq y\}$ dimana $(x,y) = (y,x)$, maka graph tersebut disebut graph sederhana pembagi nol. Pada tulisan ini, akan dikaji karakteristik graph sederhana pembagi nol $\Gamma(\mathrm{R})$, yaitu (1) graph $\Gamma(R)$ hingga jika dan hanya jika R adalah hingga atau R adalah daerah integral, (2) graph $\Gamma(R)$ adalah graph terhubung dengan $\dim(\Gamma(R)) \leq 3$, (3) ada titik dari $\Gamma(R)$ yang terhubung langsung ke semua titik lainnya jika dan hanya jika $Z(R) \cup \{0\}$ merupakan ideal annihilator, (4) ada titik dari $\Gamma(R)$ yang terhubung langsung ke semua titik lainnya jika dan hanya jika $R \cong \mathbb{Z}_2 \times A$, dimana A merupakan daerah integral, (5) jika R hingga, maka ada titik dari $\Gamma(R)$ yang terhubung langsung ke semua titik lainnya jika dan hanya jika $R \cong \mathbb{Z}_2 \times F$, dimana F merupakan field.

Kata Kunci: Graph, ring, ring komutatif, pembagi nol, graph pembagi nol.

Konsep himpunan pada teori graph dan teori ring memiliki keterkaitan, yaitu dari suatu ring dapat dibentuk graph serta sifat – sfat graph, dimana titik – titik pada graph merupakan anggota – anggota pada himpunan pembagi nol dari ring tersebut. Ring komutatif dengan unsur satuan dinotasikan dengan R, sedangkan $Z(R)$ merupakan himpunan pembagi nol dari R. Sebuah graph pembagi nol, dinotasikan dengan $\Gamma(R)$ adalah graph dengan titik – titiknya merupakan anggota pada $Z(R)$ dan sisi – sisinya adalah pasangan tak berurutan (x,y), dengan $xy = 0$ untuk $x, y \in Z(R)$. Sebagai contoh, graph pembagi nol dari ring komutatif $\mathbb{Z}_{10} = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \bar{9}\}$ yaitu $\Gamma(\mathbb{Z}_{10})$ dengan $V(\Gamma(\mathbb{Z}_{10})) = Z(\mathbb{Z}_{10}) = \{\bar{2}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{8}\}$ dan $E(\Gamma(\mathbb{Z}_{10})) = \{(\bar{2},\bar{5}), (\bar{4},\bar{5}), (\bar{6},\bar{5}), (\bar{8},\bar{5})\}$. Sehingga graph pembagi nol $\Gamma(\mathbb{Z}_{10})$ digambarkan sebaga berikut



Gambar 1. Graph Pembagi Nol dari $\mathbb{Z}_{10}$

Dalam kasus lain, misalkan graph pembagi nol dari ring komutatif $\mathbb{Z}_9 = \{\bar{0}, \bar{1}, \ldots, \bar{8}\}$ yaitu $\Gamma(\mathbb{Z}_9)$ dengan $V(\Gamma(\mathbb{Z}_9)) = \{\bar{3}, \bar{6}\}$ dan $E(\Gamma(\mathbb{Z}_9)) = \{(\bar{3}, \bar{3}), (\bar{3}, \bar{6})\}$. Sehingga graph pembagi nol $\Gamma(\mathbb{Z}_9)$ digambarkan sebaga berikut

Gambar 2. Graph Pembagi Nol dari $\mathbb{Z}_9$

Pada Gambar 1 dan Gambar 2 terlihat perbedaan yaitu masing – masing merupakan graph sederhana dan bukan graph sederhana. Pada tulisan ini, akan dikaji tentang karakteristik graph sederhana pembagi nol dari ring komutatif dengan satuan yaitu , graph $\Gamma(\mathrm{R})$ hingga jika dan hanya jika R adalah hingga atau R adalah daerah integral, graph $\Gamma(\mathrm{R})$ adalah graph terhubung dengan $\dim(\Gamma(\mathrm{R})) \leq 3$, ada titik dari $\Gamma(\mathrm{R})$ yang terhubung langsung ke semua titik lainnya jika dan hanya jika $\mathrm{Z}(\mathrm{R}) \cup \{0\}$ merupakan ideal annihilator, ada titik dari $\Gamma(\mathrm{R})$ yang terhubung langsung ke semua titik lainnya jika dan hanya jika $\mathrm{R} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathrm{A}$ dimana A merupakan daerah integral, jika R hingga, maka ada titik dari $\Gamma(\mathrm{R})$ yang terhubung langsung ke semua titik lainnya jika dan hanya jika $\mathrm{R} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathrm{F}$, dimana F merupakan field.

Untuk setiap $x, y \in Z(R), x \neq y$, x dikatakan terhubung langsung dengan y jika dan hanya jika $xy = 0$ (Livingston:1998).

PEMBAHASAN

<u>Teorema 1</u>

Misalkan R merupakan ring komutatif dengan unsur satuan. Graph $\Gamma(R)$ adalah hingga jika dan hanya jika R adalah hingga atau R merupakan daerah integral.

<u>Bukti :</u>

Bagian pertama: Akan dibuktikan jika R adalah hingga atau R merupakan daerah integral, maka Graph $\Gamma(R)$ adalah hingga .

Kasus 1 : Misalkan R merupakan daerah integral. Akan dibuktikan $\Gamma(R)$ merupakan graph hingga. Oleh karena R merupakan daerah integral, R tidak memiliki pembagi nol. Akibatnya $\mathrm{Z}(R) = \emptyset$. Jadi $\Gamma(R)$ hingga.

Kasus 2 : Misalkan R merupakan ring hingga. Akan dibuktikan $\Gamma(\mathrm{R})$ merupakan graph hingga. Oleh karena R hingga, maka $\mathrm{Z}(\mathrm{R})$ hingga. Akibatnya $\Gamma(\mathrm{R})$ hingga.

Bagian kedua: Misalkan $\Gamma(R)$ adalah graph hingga. Akan dibuktikan bahwa R hingga atau R adalah daerah integral.

Oleh karena $\Gamma(\mathrm{R})$ adalah graph hingga, maka $V\big(\Gamma(\mathrm{R})\big) = \emptyset$ atau $V(\Gamma(\mathrm{R}))$ hingga dan tidak kosong.

Kasus 1 : Misalkan $V\big(\Gamma(\mathrm{R})\big) = \emptyset$. Akibatnya $Z(R) = \emptyset$. Oleh karena itu R tidak mempunyai pembagi nol. Jadi R adalah daerah integral.

Kasus 2 : Misalkan $V(\Gamma(\mathrm{R}))$ hingga dan tidak kosong. Akibatnya $Z(R)$ hingga dan tidak kosong yang berarti R memuat unsur pembagi nol. Berarti R bukan merupakan daerah integral. Akan dibuktikan R hingga. Oleh karena $V\big(\Gamma(\mathrm{R})\big)$ tidak kosong, maka $Z(R)$ tidak kosong. Akibatnya ada $x, y \in R, x \neq 0, y \neq 0$ dimana $xy = 0$. Misalkan $I = ann(x) = \{z \in R | zx = 0)\} \subseteq Z(R) \cup \{0\}$. Akibatnya $\{0, y\} \subseteq I$. Karena $\Gamma(R)$ adalah graph hingga, maka $Z(R)$ adalah hingga. Akibatnya $I = ann(x)$ adalah hingga. Analog dengan $ann(y)$ juga hingga.

Ambil sebarang $r \in R$, maka berlaku $(ry)x = r(yx) = r(xy) = r0 = 0$. Jadi $ry \in I$, untuk semua $r \in R$. Dengan kata lain, ada $i \in I$ dengan $ry = i$, untuk setiap $r \in R$. Andaikan R tak hingga. Akibatnya $J = \{r \in R | ry = i\}$ tidak hingga. Ambil sebarang $r, s \in J$, diperoleh $(r - s)y = ry - rs = i - i = 0$. Berarti $r - s \in ann(y), r, s \in J$ dan J tidak hingga. Oleh karena itu itu $ann(y)$ adalah tak hingga. Hal ini kontradiksi dengan $ann(y)$ hingga. Oleh karena itu R harus hingga.

<u>**Teorema 2**</u>

Jika R merupakan ring komutatif dengan unsur satuan, maka $\Gamma(R)$ merupakan graph terhubung.

<u>**Bukti**</u>

Misalkan R merupakan ring komutatif. Akan dibuktikan $\Gamma(R)$ merupakan graph terhubung. Lebih lanjut $dim(\Gamma(R)) \leq 3$. Dengen kata lain akan ditunjukkan bahwa ada lintasan antara setiap pasang titik $\Gamma(R)$.

Ambil sebarang $x, y \in Z(R), x \neq y$. Akan dibuktikan ada lintasan antara titik x dan titik y.

Kasus 1 : Misalkan $xy = 0$, maka jelas bahwa x dan y terhubung langsung, sehingga ada lintasan dari x ke y, yaitu (x, y) dengan $d(x, y) = 1$.

Kasus 2 : Misalkan $xy \neq 0$, maka x dan y tidak terhubung langsung oleh suatu sisi. Terdapat beberapa kemungkinan, antara lain:

a. Misalkan $x.x = x^2 = 0$ dan $y.y = y^2 = 0$. Oleh karena itu diperoleh $x(xy) = x^2y = 0.y = 0$ dan $(xy)y = xy^2 = x.0 = 0$. Jadi terdapat lintasan antara titik x dan y, yaitu (x, xy, y) dengan $d(x, y) = 2$
b. Misalkan $x^2 = 0$ dan $y^2 \neq 0$. Oleh karena $y \in Z(R)$, maka ada $b \in Z(R) - \{y\}$ sehingga $by = 0$. Karena $xy \neq 0$, maka $b \neq x$. Jika $xb = 0$, maka jelas terdapat lintasan antara titik x dan titik y , yaitu (x, b, y) dengan $d(x, y) = 1$. Jika $xb \neq 0$, maka diperoleh $x(xb) = (xx)b = x^2b = 0.b = 0$ dan $(xb)y = x(by) = x.0 = 0$. Jadi terdapat lintasan antara titik x dan titik y, yaitu (x, xb, y) dengan $d(x, y) = 2$.
c. Misalkan $x^2 \neq 0$ dan $y^2 = 0$. Oleh karena $x \in Z(R)$, maka ada $b \in Z(R) - \{x\}$ sehingga $bx = 0$. Karena $xy \neq 0$, maka $b \neq y$. Jika $yb = 0$, maka jelas terdapat lintasan antara titik x dan titik y , yaitu (y, b, x) dengan $d(x, y) = 2$. Jika $yb \neq 0$, maka diperoleh $y(yb) = (yy)b = y^2b = 0.b = 0$ dan $(yb)x = y(bx) = x0 = 0$. Jadi terdapat lintasan antara titik y dan titik x, yaitu (y, yb, x) dengan $d(x, y) = 2$.
d. Misalkan $x^2 \neq 0$ dan $y^2 \neq 0$. Oleh karena $x \in Z(R)$ dan $y \in Z(R)$, maka ada $a, b \in Z(R) - \{x, y\}$ dengan $ax = 0$ dan $by = 0$. Karena $a, b \in Z(R)$, maka terdapat sisi dari a ke x yaitu (a, x), dan terdapat sisi dari b ke y yaitu (b, y). Jika $a = b$, maka jelas terdapat lintasan antara titik x dan titik y, yaitu (x, a, y) dengan $d(x, y) = 2$. Jika $a \neq b$, maka terdapat dua kemungkinan, yaitu untuk $ab = 0$, maka terdapat lintasan antara x dan titik y, yaitu (x, a, b, y) dengan $d(x, y) = 3$. Untuk $ab \neq 0$, diperoleh $x(ab) = (xa)b = 0.b = 0$ dan $(ab)y = a(by) = a.0 = 0$. Jadi terdapat lintasan antara titik x dan titik y, yaitu (x, ab, y) dengan $d(x, y) = 2$.

Oleh karena terdapat lintasan untuk setiap titik x dan y di $\Gamma(R)$ dimana $x \neq y$, dengan $dim(\Gamma(R)) = sup\{1,2,3\} = 3$. Jadi $\Gamma(R)$ merupakan graph terhubung dengan $dim(\Gamma(R)) \leq 3$.

<u>Teorema 3</u>

Misalkan R merupakan ring komutatif dengan unsur satuan. Maka ada titik dari $\Gamma(R)$ yang terhubung langsung ke semua titik yang lain jika dan hanya jika $Z(R) \cup \{0\}$ merupakan ideal annihilator dan merupakan ideal prima.

<u>Bukti</u>

Bagian Pertama: Ada titik dari $\Gamma(R)$ yang terhubung langsung ke semua titik yang lain.
Akan dibuktikan $Z(R) \cup \{0\}$ merupakan annihilator ideal yang merupakan ideal prima.
Misalkan ada $a \in Z(R)$ sehingga $ay = 0$ untuk setiap $y \in Z(R) - \{a\}$.
Pertama akan dibuktikan bahwa $Z(R) \cup \{0\}$ merupakan suatu ideal dari R sebagai berikut.

1. Sudah jelas bahwa $Z(R) \cup \{0\} \subseteq R$, da nada $0 \in Z(R) \cup \{0\}$ sehingga $Z(R) \cup \{0\} \neq \emptyset$.
2. Ambil sebarang $x, y \in Z(R) \cup \{0\}$. Akan dibuktikan bahwa $x + y \in Z(R) \cup \{0\}$ dan $xy \in Z(R) \cup \{0\}$. Terdapat empat kemungkinan, antara lain:
   a. Misalkan $x = 0$ dan $y = 0$, maka $x + y = 0 \in Z(R) \cup \{0\}$ dan $xy = 0 \in Z(R) \cup \{0\}$.
   b. Misalkan $x = 0$ dan $y \neq 0$, maka diperoleh $x + y = 0 + y = y \in Z(R) \cup \{0\}$ dan $xy = 0 \cdot y = 0 \in Z(R) \cup \{0\}$. Hal yang sama berlaku untuk $x \neq 0$ dan $y = 0$.
   c. Misalkan $x \neq 0$ dan $y \neq 0$. Akibatnya $x, y \in Z(R)$. Oleh karena $x, y \in Z(R)$, maka ada $a \in Z(R)$ sehingga $ax = 0$ dan $ay = 0$.

      Untuk operasi penjumlahan diperoleh $a(x + y) = ax + ay = 0 + 0 = 0$. Oleh karena $a \in Z(R)$, maka $a \neq 0$, maka ada dua kemungkinan, yaitu jika $x + y = 0$, maka jelas bahwa $x + y \in Z(R) \cup \{0\}$. jika $x + y \neq 0$, karena $a \neq 0$ dan $a(x + y) = 0$, maka $x + y \in Z(R)$. Akibanya $x + y \in Z(R) \cup \{0\}$.

      Untuk operasi perkalian diperoleh $a(xy) = (ax)y = 0 \cdot y = 0$. Oleh karena $a \in Z(R)$, maka $a \neq 0$, maka ada dua kemungkinan, yaitu jika $xy = 0$, maka jelas bahwa $xy \in Z(R) \cup \{0\}$. Jika $xy \neq 0$, $a \neq 0$, dan $a(xy) = 0$, maka $xy \in Z(R)$. Akibanya $xy \in Z(R) \cup \{0\}$.
3. Ambil sebarang $x \in Z(R) \cup \{0\}$. Akan dibuktikan bahwa $-x \in Z(R) \cup \{0\}$.
   Untuk $x = 0$, sudah jelas $-x \in Z(R) \cup \{0\}$. Untuk $x \neq 0$, maka ada $a \in Z(R), a \neq 0$ sehingga $ax = 0$. Oleh karena itu diperoleh $a(-x) = -(ax) = -0 = 0$. Karena $x \neq 0$ maka $-x \neq 0$, akibatnya $-x \in Z(R)$. Sehingga $-x \in Z(R) \cup \{0\}$.
4. Ambil sebarang $x \in Z(R) \cup \{0\}$ dan $r \in R$. Karena R komutataif, maka cukup dibuktikan bahwa $rx \in Z(R) \cup \{0\}$. Ada empat kemungkinan,yaitu:
   a. Misalkan $r = 0$ dan $x = 0$, maka sudah jelas $xr = 0 \in Z(R) \cup \{0\}$.
   b. Misalkan $r = 0$ dan $x \neq 0$, maka $xr = x \cdot 0 = 0 \in Z(R) \cup \{0\}$. Hal yang sama berlaku untuk $r \neq 0$ dan $x = 0$.
   c. Misalkan $r \neq 0$ dan $x \neq 0$. Oleh karena $0 \neq x \in Z(R) \cup \{0\}$, maka ada $a \in Z(R), a \neq 0$, sehingga $xa = 0$. Perhatikan bahwa $(rx)a = r(xa) = r \cdot 0 = 0$. Oleh karena $a \neq 0$, maka terdapat dua kemungkinan, yaitu jika $rx = 0$, maka sudah jelas $rx \in \{0\} \subseteq Z(R) \cup \{0\}$. Jika $rx \neq 0$, maka $rx \in Z(R) \subseteq Z(R) \cup \{0\}$. Akibatnya $rx \in Z(R) \cup \{0\}$.

Jadi $Z(R) \cup \{0\}$ merupakan ideal dari R.

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $Z(R) \cup \{0\}$ adalah prima, yaitu untuk setiap $x, y \in R$ dengan $xy \in Z(R) \cup \{0\}$ berlaku $x \in Z(R) \cup \{0\}$ atau $y \in Z(R) \cup \{0\}$.

Anggap $xy \in Z(R) \cup \{0\}$ dan $0 \neq y \notin Z(R) \cup \{0\}$ yang berarti y bukam pembagi nol, maka ada dua kasus, yaitu:

Kasus 1 : Anggap $xy = 0$. Karena $y \neq 0$ dan y bukan pembagi nol, berarti $yt \neq 0$ untuk setiap $0 \neq t \in R$. Andaikan $0 \neq x \in R$, berarti $yx \neq 0$. Hal ini kontradiksi dengan $xy = 0$. Akibatnya $x = 0$. Jadi $x \in Z(R) \cup \{0\}$.

Kasus 2 : Untuk $xy \neq 0$, berarti $xy \in Z(R)$, maka ada $0 \neq a \in R$ sehinga $(xy)a = 0$. Karena R komutatif, maka $y(xa) = (xy)a = 0$. Oleh karena $0 \neq y \notin Z(R) \cup \{0\}$, artinya y bukan pembagi nol. Dengan kata lain $yt \neq 0$ untuk setiap $0 \neq t \in R$. Andaikan $xa \neq 0$, maka $y(xa) \neq 0$. Hal ini kontradiksi dengan $y(xa) = 0$. Akibatnya $xa = 0$. Oleh karena $0 \neq a \in Z(R)$, maka diperoleh dua kemungkinan, yaitu $x = 0$ atau $x \in Z(R)$ yang berarti $x \in Z(R) \cup \{0\}$. Jadi $Z(R) \cup \{0\}$ merupakan ideal prima.

Setelah itu akan dibuktikan bahwa $Z(R) \cup \{0\}$ merupakan ideal annihilator.

Ada $a \in Z(R)$ yang terhubung langsung ke semua titik yang lain. Hal ini berarti bahwa $ay = 0$ untuk setiap $y \in Z(R) - \{a\}$. Didefinisikan $ann(a) = \{r \in R | ra = 0\}$ merupakan annihilator dari $a \in R$. Berdasarkan definisi annihilator, jelas bahwa semua $y \in Z(R) - \{a\}$ termuat di $ann(a)$ karena $ya = ay = 0$, dan karena $0 \cdot a = 0$, maka $0 \in ann(x)$. Jika $a \in ann(a)$, maka sudah jelasa bahwa $Z(R) \cup \{0\} = ann(a)$ mengakibatkan $Z(R) \cup \{0\}$ adalah annihilator. Andaikan $a \notin ann(a)$, maka $a^2 \neq 0$. Oleh karena $a \in Z(R)$, dan $ay = 0$ untuk setiap $y \in Z(R) - \{a\}$, maka $a^2. y = (a \cdot a) \cdot y = a \cdot (ay) = a \cdot 0 = 0$. Karena $a^2 \neq 0$ dan $a^2. y = 0$, maka $a^2 \in Z(R)$. Akibatnya $a^2. a = 0$. Hal ini berarti bahwa $a^2 = (a \cdot a) \in ann(a)$. Oleh karena $ann(a) = \{r \in R | ra = 0\}$ merupakan ideal prima. Akibatnya $a \in ann(a)$. Hal ini kontradiksi dengan $a \notin ann(a)$. Jadi $Z(R) \cup \{0\}$ merupakan ideal annihilator.

Bagian Kedua: $Z(R) \cup \{0\}$ merupakan ideal annihilator. Akan dibuktikan ada titik dari $\Gamma(R)$ yang terhubung langsung ke semua titik yang lain. Oleh karena $Z(R) \cup \{0\}$ merupakan ideal annihilator, maka terdapat $a \in Z(R) \cup \{0\}$ sehingga $ab = 0$ untuk setiap $b \in (Z(R) \cup \{0\}) - \{a\}$. Pilih $a = x \in Z(R) - \{0\}$. Akibatnya $x \in Z(R)$. Artinya ada $x \in Z(R)$ sehingga $xb = 0$ untuk setiap $b \in Z(R) - \{x\}$. Jadi ada titik di $\Gamma(R)$ yang terhubung langsung ke semua titik yang lain.

Teorema 4

Misalkan R merupakan ring komutatif dengan unsur satuan. Maka ada titik dari $\Gamma(R)$ yang terhubung langsung ke semua titik yang lain jika dan hanya jika $R \cong \mathbb{Z}_2 \times A$, dimana A adalah daerah integral.

Bukti

Bagian Pertama: Ada titik dari $\Gamma(R)$ yang terhubung langsung ke semua titik yang lain.

Akan dibuktikan $R \cong \mathbb{Z}_2 \times A$, dimana A adalah daerah integral.

Misalkan $R \cong R_1 \times R_2$ dengan R_1 dan R_2 adalah suatu ring komutatif dengan satuan dan (1,0) sebagai salah satu titik yang terhubung langsung dengan setiap titik yang lain.

Akibatnya $(1,0) \in Z(R)$. Akan dibuktikan $R_1 \cong \mathbb{Z}_2$ dan $R_2 = A$ merupakan daerah integral.

Andaikan ada titik $(c,0) \in Z(R) - \{(1,0)\}$ yang terhubung langsung dengan semua titik.

Akibatnya $c \in R_1 - \{1\}$. Diperoleh

$$(c,0)(1,0) = (0,0)$$
$$(c,0) = (0,0)$$
$$c = 0$$

Hal ini kontradiksi dengan pengandaian karena c tidak boleh sama dengan 0. Akibatnya (1,0) adalah satu – satunya titik yang terhubung langsung dengan setiap titik yang lain dan $R_1 = \{0,1\}$. Oleh karena ada fungsi $f: R_1 \to \mathbb{Z}_2$ didefinisikan $f(x) = \bar{x}$ dimana $x \in R_1$ dan $\bar{x} \in \mathbb{Z}_2$ yang memenuhi :

a. $\forall x, y \in R_1$, berlaku $f(x+y) = \overline{x+y} = \bar{x} + \bar{y} = f(x) + f(y)$, dan $f(xy) = \overline{x \cdot y} = \bar{x} \cdot \bar{y} = f(x) \cdot f(y)$.
b. Dengan menggunakan table, diperoleh $f: R_1 \to \mathbb{Z}_2$merupakan fungsi satu – satu dan pada.

Table 3.1 Tabel fungsi satu – satu dan pada

R_1	$f(x) = \bar{x}$
$0 \in R_1$	$f(0) = \bar{0} \in \mathbb{Z}_2$
$1 \in R_1$	$f(1) = \bar{1} \in \mathbb{Z}_2$

Jadi $R_1 \cong \mathbb{Z}_2$.

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $R_2 = A$ merupakan daerah integral.

Andaikan R_2 merupakan ring komutatif dengan pembagi nol a dan b. Akibatnya $a, b \in Z(R_2)$, sehingga diperoleh $(1,a)(1,b) = (1,0) \in Z(R)$, dengan kata lain $(1,a)(1,b) \in Z(R) \cup \{0\}$. Berdasarkan Teorema 3.3 $Z(R) \cup \{0\}$ merupakan ideal prima dan $(1,a)(1,b) \in Z(R) \cup \{0\}$, maka $(1,a) \in Z(R)$ atau $(1,b) \in Z(R)$. Tetapi, jika $(1,a) \in Z(R)$ diperoleh

$(1, a)(1,0) \neq (0,0)$, dan jika $(1, b) \in Z(R)$ diperoleh $(1,0)(1,0) \neq (0,0)$. sehingga hal ini kontradiksi dengan pengandaian. Jadi R_2 tidak memiliki pembagi nol, dengan kata lain $R_2 = A$ merupakan daerah integral.

Bagian Kedua: Misalkan $R \cong \mathbb{Z}_2 \times A$, dimana A adalah daerah integral. Akan dibuktikan bahwa ada titik dari $\Gamma(R)$ yang terhubung langsung ke semua titik yang lain.

Oleh karena $R \cong \mathbb{Z}_2 \times A$, maka terdapat suatu fungsi $\varphi: R \to \mathbb{Z}_2 \times A$ yang isomorfis.

Ambil sebarang $a \in A - \{0,1\}$. Akibatnya $(1,0) \cdot (0, a) = \big((1 \cdot 0), (0 \cdot a)\big) = (0,0)$.

Perhatikan bawha $(1,0)$, $(0, a)$, dan $(0,0)$ merupakan anggota dari $\mathbb{Z}_2 \times A$. Karena $\varphi: R \to \mathbb{Z}_2 \times A$ isomorfis, maka $\varphi^{-1}(1,0) \in R$, $\varphi^{-1}(0, a) \in R$, dan $\varphi^{-1}(0,0) \in R$. Akibatnya terdapat $b \in R, b \neq 0$ dengan $\varphi(b) = (1,0)$, terdapat $0 \in R$ dengan $\varphi(0) = (0,0)$, dan terdapat $c \in R, c \neq 0$ dengan $\varphi(c) = (0, a)$ untuk setiap $a \in A - \{0,1\}$. Sehingga diperoleh $\varphi(bc) = \varphi(b)\varphi(c) = (1,0)(0, a) = (0,0) = \varphi(0)$. Karena fungsi φ satu – satu, maka $bc = 0, b \neq 0, c \neq 0$. Oleh karena itu dapat dilihat bahwa terdapat suatu titik yang terhubung ke setiap titik lainnya.

<u>Corollary 5</u>

Misalkan R merupakan ring komutatif hingga dengan unsur satuan. Maka ada titik dari $\Gamma(R)$ yang terhubung langsung ke semua titik yang lain jika dan hanya jika $R \cong \mathbb{Z}_2 \times F$, dimana F adalah Field.

<u>Bukti</u>

Bagian Pertama: Ada titik dari $\Gamma(R)$ yang terhubung langsung ke semua titik yang lain.

Akan dibuktikan $R \cong \mathbb{Z}_2 \times F$, dimana F adalah field.

Misalkan $R \cong R_1 \times R_2$ dengan R_1 dan R_2 adalah suatu ring komutatif hingga dengan satuan dan $(1,0)$ sebagai salah satu titik yang terhubung langsung dengan setiap titik yang lain.

Akibatnya $(1,0) \in Z(R)$. Akan dibuktikan $R_1 \cong \mathbb{Z}_2$ dan $R_2 = F$ merupakan field.

Berdasarakan Teoream 4 Bagian Pertama, sudah jelas bahwa $R_1 \cong \mathbb{Z}_2$ dan R_2 merupakan daerah integral. Oleh karena R_2 hingga, maka $R_2 = F$ adalah field.

Bagian Kedua: Misalkan $R \cong \mathbb{Z}_2 \times F$, dimana F adalah field. Akan dibuktikan bahwa ada titik dari $\Gamma(R)$ yang terhubung langsung ke semua titik yang lain.

Perhatikan bahwa setiap field merupakan daerah integral. Dengan kata lain jika F field, maka F adalah daerah integral.

Oleh karena $R \cong \mathbb{Z}_2 \times F$ diman F adalah field dan setiap field merupakan daerah integral, maka hal ini analog dengan Teorema 4 Bagian Kedua. Oleh karena itu jelas dapat dilihat bahwa terdapat suatu titik yang terhubung ke setiap titik lainnya.

PENUTUP

Kesimpulan

Jika R merupakan ring komutatif dengan satuan dan $Z(R)$ merupakan himpunan semua pembagi nol dari R, maka dapat dibentuk suatu graph sederhana peembagi nol $\Gamma(R) = \left(V(\Gamma(R)), E(\Gamma(R))\right)$, dimana $V(\Gamma(R)) = Z(R)$ merupaka himpunan titik – titik dari graph $\Gamma(R)$ dan $E(\Gamma(R)) = \{(x, y) | xy = 0, x, y \in Z(R), x \neq y\}$ merupakan himpunan sisi – sisi dari graph $\Gamma(R)$ dimana $(x, y) = (y, x)$.

Selain itu, dari ring komutatif dengan satuan tersebut bisa diperoleh sifat – sifat graph sederhana antara lain, (1) graph $\Gamma(R)$ hingga jika dan hanya jika R adalah hingga atau R adalah daerah integral, (2) graph $\Gamma(R)$ adalah graph terhubung dengan $\dim(\Gamma(R)) \leq 3$, (3) ada titik dari $\Gamma(R)$ yang terhubung langsung ke semua titik lainnya jika dan hanya jika $Z(R) \cup \{0\}$ merupakan ideal annihilator, (4) ada titik dari $\Gamma(R)$ yang terhubung langsung ke semua titik lainnya jika dan hanya jika $R \cong \mathbb{Z}_2 \times A$, dimana A merupakan daerah integral, (5) jika R hingga, maka ada titik dari $\Gamma(R)$ yang terhubung langsung ke semua titik lainnya jika dan hanya jika $R \cong \mathbb{Z}_2 \times F$, dimana F merupakan field.

Saran

Pembahasan tentang graph pembagi nol ini hanya terbatas pada keterkaitan antara ring komutatif dengan satuan dan graph sederhana. Pada penulisan selanjutnya, disarankan untuk mengkaji keterkaitan antara ring secara umum dengan graph sederhana atau ring nonkomutatif dengan satuan dan graph sederhana.

REFERENSI

1. Aldous, Joan M. & Wilson, Robin J. 1995. *Graph and Application - An Introductory Approach*. London: Springer.
2. Anderson, David F. & Livingston, Philip S. 1998. The Zero-Divisor Graph of a Commutatif Ring. *Journal of Algebra*,. (Online). (http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021869398978401), diakses pada 10 Februari 2016.

3. Gallian, J. A. 2010. *Contemporary Abstract Algebra seventh edition*. USA: Brooks/Cole.
4. Gilbert, J. & Gilbert L. 2009. *Elements of Modern Algebra seventh edition*. USA: Brooks/Cole.
5. Lam, T.Y. 2001. *Exercise in Classical Rings (Second Edition)*. USA:Springer.
6. Rosen, Kenneth H., Michaels, John G., Gross, Jonathan L., Grossman, Jerrold W. & Shier, Douglas R. 2000. *Handbook of Discrete and Combinatorial Mathematics*. Florida: CRC Press.
7. Wilson, Robin J. 1996. *Introduction to Graph Theory (Fourth Edition)*. England: Longman.