Penyelesaian persamaan diferensial parsial dengan metode dekomposisi adomian

Rima Anissa Pratiwi[1)], Makbul Muksar [2)]
Jurusan Matematika
Fakultas Matematika Dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Negeri Malang
E-mail: rimanissa@gmail.com

ABSTRAK : Metode dekomposisi Adomian adalah salah satu metode alternatif untuk menyelesaikan persamaan diferensial parsial secara analitik. Metode ini dapat menyelesaiakan persamaan diferensial tanpa menggunakan linierisasi atau diskritisasi. Ide dasar dari metode dekomposisi Adomian adalah persamaan diferensial parsial dituliskan dalam bentuk operator linier $\mathrm{L_x u + L_t u + Nu = 0}$. Solusi umum dari metode dekomposisi Adomian dinyatakan sebagai $\mathrm{u(x,t)} = \sum_{\mathrm{n=0}}^{\infty} \mathrm{u_n(x,t)}$ dengan suku nonliniernya didefinisikan sebagai $\mathrm{Nu} = \sum_{\mathrm{n=0}}^{\infty} \mathrm{A_n(u_0, u_1, \dots, u_n)}$ dengan $\mathrm{A_n} = \sum_{\mathrm{v=1}}^{\mathrm{n}} \mathrm{c(v,n)\, f^{(v)}(u_0)}, \mathrm{n = 0,1,2,\dots}$ yang merupakan polinomial Adomian. Sehingga didapatkan suku dari $\mathrm{u(x,t)} = \sum_{\mathrm{n=0}}^{\infty} \mathrm{u_n(x,t)}$ adalah $u_0 = \phi_x$, dengan $\phi_x = \xi_0(t) + x\xi_1(t)$ dan $u_{n\geq 1} = -{L_x}^{-1} L_t u_{n-1} - {L_x}^{-1} A_{n-1}$ dengan $\xi_0(t)$ dan $\xi_1(t)$ merupakan koefisien yang sesuai dengan kondisi batas yang sudah diberikan.

Kata Kunci : Metode Dekomposisi Adomian, Persamaan Diferensial, Persamaan Diferensial Parsial.

ABSTRACT : The Adomian decomposition method is one of alternative methods to solve partial differential equations analytically. This method can resolving differential equations without using linearization or discretization. The basic idea of methods decomposition Adomian is a partial differential equation written in the form of a linear operator $L_x u + L_t u + Nu = 0$. The general solution of Adomian decomposition methods expressed as $u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t)$ with the nonlinier term is defined as $Nu = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(u_0, u_1, \dots, u_n)$ where $A_n = \sum_{v=1}^{n} c(v,n)\, f^{(v)}(u_0), n = 0,1,2,\dots$ is polynomial Adomian. So we get the terms of $u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t)$ are $u_0 = \phi_x$, with $\phi_x = \xi_0(t) + x\xi_1(t)$ and $u_{n\geq 1} = -{L_x}^{-1} L_t u_{n-1} - {L_x}^{-1} A_{n-1}$ where $\xi_0(t)$ and $\xi_1(t)$ is corresponding coefficient to the boundary conditions already given.

Keywords : Adomian Decomposition Method, Differential Equation, Partial Differential Equation.

Persamaan diferensial parsial memegang peranan penting di dalam keadaan fisis, dimana besaran-besaran yang terlibat didalamnya berubah terhadap ruang dan waktu. Persamaan diferensial parsial, yaitu persamaan yang memuat lebih dari satu turunan parsial. Sama halnya dengan persamaan diferensial biasa, persamaan ini berkaitan dengan nilai awal juga dengan nilai batas. Penerapan persamaan diferensial parsial lebih luas jika dibandingkan dengan persamaan

1) Mahasiswa Program Studi Matematika FMIPA Universitas Negeri Malang
2) Dosen Jurusan Matematika FMIPA Universitas Negeri Malang

diferensial biasa. Bebeberapa contoh hukum fisika yang menggunakan persamaan diferensial parsial misalnya, persamaan Maxwell, hukum Newton, persamaan Navier-Stokes, dan lain-lain (Farlow:1982).

Banyak metode yang telah dibahas dalam perkuliahan untuk menyelesaikan solusi masalah nilai awal dan masalah nilai batas dari persaman diferensial parsial. Metode-metode tersebut misalnya metode variabel terpisah, ekspansi fungsi-*eigen*, transformasi *Laplace*.

Dalam artikel ini akan dibahas metode pendekatan secara analitik untuk menyelesaikan persamaan diferensial parsial yaitu metode dekomposisi Adomian sebagai alternatif lain untuk menyelesaikan persamaan diferensial parsial. Metode dekomposisi Adomian diperkenalkan oleh G. Adomian untuk menyelesaikan persamaan diferensial tanpa menggunakan linierisasi atau diskritisasi. Tujuan dari metode dekomposisi Adomian yaitu untuk mendapatkan solusi yang lebih mudah dikerjakan (Adomian, 1994).

HASIL DAN PEMBAHASAN

- **Metode Dekomposisi Adomian**

Untuk menyelesaikan persamaan diferensial parsial dengan menggunakan metode dekomposisi Adomian, persamaan diferensial dapat ditulis dalam bentuk

$$Fu = g(t) \tag{1}$$

dengan F adalah operator diferensial nonlinier yang memuat dua suku yaitu suku linier dan nonlinier.

Definisikan suku linier dengan Lu, dengan L adalah operator linier yang mudah ditentukan inversnya. Invers dari operator linier L adalah L^{-1}. Karena L merupakan operator diferensial orde-n, sehingga L^{-1} adalah integral rangkap-n. Kemudian definisikan R adalah operator linier selain L, dan Nu adalah suku nonlinier. Sehingga persamaan $\mathrm{Fu} = \mathrm{g(t)}$ dapat ditulis sebagai

$$Lu + Ru + Nu = g$$

$$Lu = g - Ru - Nu$$

Kemudian kedua ruas persamaan dikenakan invers dari operator L yaitu L^{-1}, sehingga diperoleh

$$L^{-1}Lu = L^{-1}(g - Ru - Nu)$$

Pada masalah nilai awal dimisalkan $= \frac{d^n}{dt^n}$, dengan L^{-1} adalah integral tentu rangkap-n dari 0 sampai t.

Pada metode Dekomposisi Adomian, solusi u dapat dinyatakan sebagai

$$\mathrm{u} = \mathrm{u}_0 + \mathrm{u}_1 + \mathrm{u}_2 + \cdots = \sum_{\mathrm{n}=0}^{\infty} \mathrm{u}_\mathrm{n} \tag{2}$$

dengan $\mathrm{u}_0 = \mathrm{u}(0) + \mathrm{t}\frac{\mathrm{du}(0)}{\mathrm{dt}} + \mathrm{L}^{-1}\mathrm{g}$.

Misalkan suku nonlinier Nu adalah analitik sehingga dapat ditulis sebagai

$$\mathrm{Nu} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(u_0, u_1, \dots, u_n)$$

dengan A_n adalah polynomial Adomian khusus yang dibentuk untuk menghitung suku khusus nonlinier. A_n hanya bergantung pada u_0 sampai u_n. A_n dapat dibentuk dalam suatu rumus untuk $n \geq 1$ yaitu

$$A_n = \sum_{v=1}^{n} c(v, n)\, f^{(v)}(u_0)$$

Dengan $c(v, n)$ adalah hasil kali dari v komponen u yang jumlah indeksnya sama dengan n, dibagi dengan faktorial dari banyak indeks yang berulang. Sebagai contoh $c(1,3) = u_3$, $c(2,3) = u_1 u_2$ dan $c(3,3) = \left(\frac{1}{3!}\right) {u_1}^3$. Untuk persamaan nonlinier di u, kita dapat menyatakan fungsi f(u) yang diberikan di A_n dengan $f(u) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$.

Polinomial A_n tidak tunggal, misalkan untuk $f(u) = u^2$, $A_0 = {u_0}^2$, $A_1 = 2u_0 u_1$, $A_2 = {u_1}^2 + 2u_2 u_0$,…, Tetapi nilai A_1 dapat ditulis sebagai $A_1 = 2u_0 u_1 + {u_1}^2$ yang mana ${u_1}^2$ adalah suku pertama dari A_2 karena u_0 dan u_1 sudah diketahui saat menghitung u_2.

Jika ditulis $f(u) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n\, [f(u)]$ atau $f(u) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$ dan misalkan $f(u) = u$, dengan $u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$ sehingga didapatkan $A_0 = u_0, A_1 = u_1, \dots$.Dengan demikian dapat dikatakan u dan f(u) adalah solusi dan suku nonlinier yang diselesaikan menggunakan A_n, sehingga pendekatan n-suku $\varphi_n = \sum_{i=0}^{n-1} u_i$ mendekati $u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$ untuk $n \to \infty$. Sehingga solusi (1) dapat ditulis sebagai

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n = u_0 - L^{-1} R \sum_{n=0}^{\infty} u_n - L^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} A_n$$

Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} u_1 &= -L^{-1} R u_0 - L^{-1} A_0, \\ u_2 &= -L^{-1} R u_1 - L^{-1} A_1, \\ &\vdots \\ u_{n+1} &= -L^{-1} R u_n - L^{-1} A_n, \end{aligned}$$

komponen A_0 hanya bergantung pada u_0. A_1 hanya bergantung pada u_0, u_1, dan seterusnya.

Contoh 1:

Diberikan persamaan diferensial biasa linier

$$\frac{du}{dt} = 1 - u, \qquad u(0) = 0 \tag{3}$$

Akan dicari solusi $u(t)$.

Dengan menggunakan metode variabel terpisah didapatkan solusi eksak $u(t) = 1 - e^{-t}$.

Dengan menggunakan metode dekomposisi Adomian, didefinisikan $L(.) = \frac{d}{dt}(.)$, sehingga $L^{-1}(.) = \int_0^t (.)\, dt$

Sehingga persamaan (3) dapat ditulis sebagai

$$Lu = 1 - u \tag{4}$$

Selanjutnya aplikasikan L^{-1} pada kedua ruas persamaan (4) didapatkan:

$$L^{-1}Lu = L^{-1}(1-u)$$
$$u(t) - u(0) = L^{-1}(1) - L^{-1}(u)$$
$$u(t) = u(0) + L^{-1}(1) - L^{-1}(u)$$
$$u(t) = u(0) + t - L^{-1}(u)$$

Definisikan $u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t)$. Sehingga didapatkan:

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) = u(0) + t - L^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) \tag{5}$$

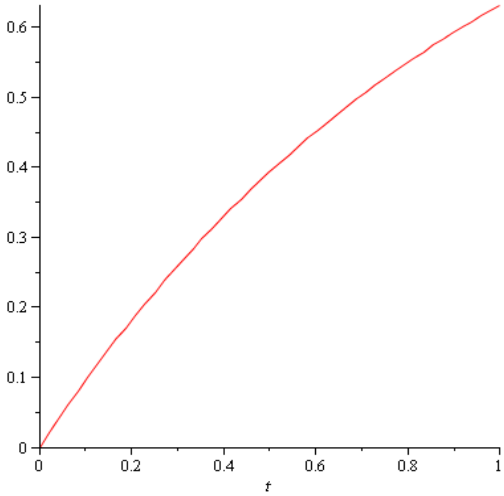
Dari persamaan (5) didapatkan relasi rekursif sebagai berikut:

$$u_0(t) = u(0) + t = t$$
$$u_1(t) = -L^{-1}\big(u_0(t)\big) = -\int_0^t s\, ds = \left[-\frac{1}{2}s^2\right]_0^t = -\frac{1}{2}t^2$$
$$u_2(t) = -L^{-1}\big(u_1(t)\big) = \int_0^t \frac{1}{2}s^2\, ds = \left[\frac{1}{6}s^3\right]_0^t = \frac{1}{6}t^3$$
$$\vdots$$
$$u_n(t) = -L^{-1}\left(u_{(n-1)}(t)\right) = -\frac{1}{(n+1)!}t^{n+1}$$

Jadi, solusi persamaan diferensial nonlinier (4) dengan menggunakan metode dekomposisi Adomian adalah sebagai berikut:

$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t)$$
$$= u_0(t) + u_1(t) + u_2(t) + \cdots$$
$$= t - \tfrac{1}{2}t^2 + \tfrac{1}{6}t^3 + \cdots$$

Yang mana dengan menggunakan perluasan Taylor didapatkan $u(t) = t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3 + \cdots = 1 - \left(1 - t + \frac{t^2}{2!} - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} - \cdots\right) = 1 - e^{-t}.$



Gambar 1 Solusi $u(t) = 1 - e^{-t}$

- **Metode Dekomposisi Adomian untuk Persamaan Diferensial Parsial**

Persmaan Diferensial Parsial ditulis dengan

$$L_x u + L_t u + Nu = 0 \qquad (6)$$

dengan $L_x = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$, $L_t = \frac{\partial^2}{\partial t^2}$ dan Nu suku nonlinier yang bersifat analitik yang diselesaikan dengan menggunakan polynomial Adomian.

Diberikan batas,

$$u(a_1, t) = \alpha_1(t) \qquad u(x, b_1) = \beta_1(x)$$
$$u(a_2, t) = \alpha_2(t) \qquad u(x, b_2) = \beta_2(x)$$

Persamaan (6) dapat ditulis dengan dua macam cara, yaitu:

$$L_x u = -L_t u - Nu \qquad (7)$$

$$L_t u = -L_x u - Nu \qquad (8)$$

Solusi untuk persamaan (7) dapat ditentukan dengan cara mengapresiasikan invers ke persamaan (7) dengan invers dari operator L_x .

$$L_x^{-1} L_x u = -L_x^{-1} L_t u - L_x^{-1} Nu$$

dengan $L_x^{-1} = \int_0^x \int_0^x (.)\, dsds$. Secara detail solusi tersebut adalah

$$L_x^{-1} L_x u = -L_x^{-1} L_t u - L_x^{-1} Nu$$
$$\int_0^x \int_0^x L_x u \, dsds = -L_x^{-1} L_t u - L_x^{-1} Nu$$
$$u = \phi_x - L_x^{-1} L_t u - L_x^{-1} Nu$$

dengan $\phi_x = \xi_0(t) + x\xi_1(t)$. Yang mana $\xi_0(t)$ dan $\xi_1(t)$ merupakan koefisien yang sesuai dengan kondisi batas yang sudah diberikan.

Solusi untuk persamaan (8) juga dapat ditentukan dengan cara mengapresiasikan invers ke persamaan (8) dengan invers dari operator L_t.

$$L_t^{-1} L_t u = -L_t^{-1} L_x u - L_t^{-1} Nu$$

dengan $L_t^{-1} = \int_0^t \int_0^t (.)\, dsds$. Dengan demikian didapatkan

$$L_t^{-1}L_tu = -L_t^{-1}L_xu - L_t^{-1}Nu$$
$$\int_0^t\int_0^t L_tu\, dsds = -L_t^{-1}L_xu - L_t^{-1}Nu$$
$$u = \phi_t - L_t^{-1}L_xu - L_t^{-1}Nu$$

dengan $\phi_t = \xi_0(x) + t\xi_1(x)$. Yang mana $\xi_0(x)$ dan $\xi_1(x)$ merupakan koefisien yang sesuai dengan kondisi batas yang sudah diberikan.

Kemudian dimisalkan $u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$ dan $Nu = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$ dengan A_n adalah polynomial Adomian yang didefinisikan untuk Nu. Suku u_0 biasanya dianggap sebagai ϕ_x (atau $\phi_x + L_x^{-1}g$ jika persamaan diferensial berbentuk tak homogen).

Pada umumnya, kedua operator dapat digunakan untuk menemukan solusi persamaan diferensial. Untuk menyelesaikan persamaan diferensial parsial dapat dilakukan secara analog dengan menyelesaikan persamaan diferensial biasa. Jika persamaan diferensial diselesaikan melalui operator L_x maka operator L_t dianggap seperti R pada persamaan diferensial biasa.

Dapat juga digunakan pendekatan yang agak berbeda. Pendekatan ini dikenal sebagai dekomposisi ganda yang mana ϕ_x akan didekomposisikan juga. Pada kasus ini kita tulis:

$$\phi_{x,m} = \xi_{0,m}(t) + x\xi_{1,m}(t)$$

dan

$$u_0 = \phi_{x,0}$$

Maka akan didapatkan rumus untuk u_{m+1} sebagai berikut:

$$u_{m+1} = -L_x^{-1}L_tu_m - L_x^{-1}A_n \qquad , m \geq 1$$

Sehingga akan didapatkan

$$u_1 = \phi_{x,1} - L_x^{-1}L_tu_0 - L_x^{-1}A_0$$
$$u_2 = \phi_{x,2} - L_x^{-1}L_tu_1 - L_x^{-1}A_1$$
$$u_3 = \phi_{x,3} - L_x^{-1}L_tu_2 - L_x^{-1}A_2$$
$$\vdots$$
$$u_m = \phi_{x,m} - L_x^{-1}L_tu_{m-1} - L_x^{-1}A_{m-1}$$

Kondisi batas

$$\varphi_{m+1}(a_1, t) = \alpha_1(t)$$
$$\varphi_{m+1}(a_2, t) = \alpha_2(t)$$

menentukan $\xi_{0,m}$ dan $\xi_{1,m}$. Maka

$$u_0 = \phi_{x,0}$$
$$u_1 = \phi_{x,1} - L_x^{-1}L_t\phi_{x,0} - L_x^{-1}A_0$$
$$u_2 = \phi_{x,2} - L_x^{-1}L_t\phi_{x,1} + (L_x^{-1}L_t)^2\phi_{x,0} - L_x^{-1}L_tL_x^{-1}A_0 - L_x^{-1}A_1$$
$$u_3 = \phi_{x,3} - L_x^{-1}L_t\phi_{x,2} + \left(L_x^{-1}L_t\right)^2\phi_{x,1} - \left(L_x^{-1}L_t\right)^3\phi_{x,0}$$
$$-\left(L_x^{-1}L_t\right)^2L_x^{-1}A_0 + L_x^{-1}L_tL_x^{-1}A_1 - L_x^{-1}A_2$$
$$\vdots$$
$$u_m = \sum_{n=0}^{m}\left(-L_x^{-1}L_t\right)^n\phi_{x,m-n} - \sum_{n=0}^{m-1}\left(-L_x^{-1}L_t\right)^{m-1-n}L_x^{-1}A_n$$

Sehingga didapatkan

$$u(x,t)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{m}\left(-L_x^{-1}L_t\right)^n\phi_{x,m-n}-\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{m-1}\left(-L_x^{-1}L_t\right)^{m-1-n}L_x^{-1}A_n$$

Yaitu solusi dari persamaan pada x. Prosedur yang sama dapat diterapkan juga untuk persamaan t.

Contoh 2: Persamaan Diferensial Parsial Linier Tipe Hiperbola

Diberikan model persamaan diferensial parsial linier

$$u_{xx}-u_{yy}=0 \qquad ,0\le x\le \pi/2, 0\le y\le \pi/2 \tag{9}$$

dengan kondisi batas diberikan

$$u(0,y)=0, u\left(\frac{\pi}{2},y\right)=\sin y, \qquad 0\le y\le \pi/2,$$
$$u(x,0)=0, u\left(x,\frac{\pi}{2}\right)=\sin x, \qquad 0\le x\le \pi/2.$$

Dengan menggunakan metode dekomposisi Adomian, didefinisikan $L_x(.)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}(.)$ dan $L_y(.)=\frac{\partial^2}{\partial y^2}(.)$ sehingga persamaan (9) dapat ditulis menjadi

$$L_x u = L_y u. \tag{10}$$

Kemudian terapkan operator invers $L_x^{-1}(.)=\int_0^x\int_0^x(.)\,dsds$ pada persamaan (3.13) didapatkan

$$u=\phi_x+L_x^{-1}L_y u \tag{11}$$

dengan $\phi_x=\xi_0(y)+x\xi_1(y)$.

Asumsikan $u(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x,y)$ dan dengan menggunakan metode dekomposisi ganda, u_0 akan didekomposisikan juga. Sehingga u_0 dapat dinyatakan sebagai $u_0=\sum_{n=0}^{\infty}u_{0,m}$. Sehingga persamaan (11) dapat ditulis sebagai

$$\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}\phi_{x,n}+L_x^{-1}L_y\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x,y)$$

dengan $u_0=\phi_{x,0}$, dan $u_{n\ge1}=\phi_{x,n}+L_x^{-1}L_y u_{n-1}$. Karena $L_x\phi_x=0$, maka didapatkan

$$\phi_{x,0}=\xi_0(y)+x\xi_1(y)$$
$$\phi_{x,n}=\xi_{0,n}(y)+x\xi_{1,n}(y)$$

dengan ξ adalah nilai yang didapatkan dari integral tak tentu. Kondisi yang diberikan akan digunakan untuk menentukan konstanta ξ untuk pendekatan solusi $\varphi_{n+1}=\sum_{m=0}^{n}u_m$. Sehingga dapat ditulis $\varphi_{n+1}(x,0)=0$ dan $\varphi_{n+1}\left(\frac{\pi}{2},y\right)=\sin y$ untuk mencari nilai dari $\xi_{0,n}(y)$ dan $\xi_{1,n}(y)$. Perhatikan bahwa

$$u(x,y)=\phi_x+L_x^{-1}L_y u=\xi_0(y)+x\xi_1(y)+L_x^{-1}L_y u$$

Pendekatan suku pertama diberikan sebagai:

$$\varphi_1=u_0=\xi_{0,0}+x\xi_{1,0}$$

Karena $\varphi_1(x,0)=0$, didapatkan

$$\varphi_1(x,0)=\xi_{0,0}+(0).\xi_{1,0}$$
$$\xi_{0,0}=0.$$

Karena $\varphi_1\left(\frac{\pi}{2},y\right)=\sin y$, didapatkan

$$\varphi_1\left(\frac{\pi}{2}, y\right) = \xi_{0,0} + \left(\frac{\pi}{2}\right).\xi_{1,0}$$
$$\sin y = \left(\frac{\pi}{2}\right).\xi_{1,0}$$
$$\xi_{1,0} = \left(\frac{2}{\pi}\right)\sin y.$$

Oleh karena itu, $\varphi_1 = u_0 = \left(\frac{2}{\pi}\right) x \sin y$. Untuk menghitung u_1, perhatikan bahwa

$$u_1 = \xi_{0,1} + x\xi_{1,1} + {L_x}^{-1} L_y u_0$$

dengan

$$L_y u_0 = -\left(\frac{2}{\pi}\right) x \sin y$$
$$L_x{}^{-1} L_y u_0 = \int_0^x \int_0^x -\left(\frac{2}{\pi}\right) s \sin y \, ds ds = -\left(\frac{2}{\pi}\right)\left(\frac{x^3}{3!}\right)\sin y$$

Sehingga

$$u_1 = \xi_{0,1} + x\xi_{1,1} - \left(\frac{2}{\pi}\right)\left(\frac{x^3}{3!}\right)\sin y.$$

Pendekatan suku kedua diberikan sebagai:

$$\varphi_2 = u_0 + u_1 = \left(\frac{2}{\pi}\right) x \sin y - \left(\frac{2}{\pi}\right)\left(\frac{x^3}{3!}\right)\sin y + \xi_{0,1} + x\xi_{1,1}$$

dengan $\varphi_2(0, y) = 0$ dan $\varphi_2\left(\frac{\pi}{2}, y\right) = \sin y$.

Karena $\varphi_2(0, y) = 0$, didapatkan

$$\varphi_2(0, y) = \left(\frac{2}{\pi}\right)(0).\sin y - \left(\frac{2}{\pi}\right)\left(\frac{0^3}{3!}\right)\sin y + \xi_{0,1} + (0).\xi_{1,1}$$
$$\xi_{0,1} = 0.$$

Karena $\varphi_1\left(\frac{\pi}{2}, y\right) = \sin y$, didapatkan

$$\varphi_2\left(\frac{\pi}{2}, y\right) = \left(\frac{2}{\pi}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right).\sin y - \left(\frac{2}{\pi}\right)\left(\frac{(\pi/2)^3}{3!}\right)\sin y + \xi_{0,1} + \left(\frac{\pi}{2}\right).\xi_{1,1}$$
$$\sin y = \sin y - \left(\frac{(\pi/2)^2}{3!}\right)\sin y + \left(\frac{\pi}{2}\right).\xi_{1,1}$$
$$\left(\frac{\pi}{2}\right).\xi_{1,1} = \left(\frac{(\pi/2)^2}{3!}\right)\sin y$$
$$\xi_{1,1} = \left(\frac{\pi}{2}\right)\sin y /3!$$

Sehingga

$$u_1 = \xi_{0,1} + x\xi_{1,1} - \left(\frac{2}{\pi}\right)\left(\frac{x^3}{3!}\right)\sin y = \left(\frac{\pi}{2}\right) x \sin y /3! - \left(\frac{2}{\pi}\right)\left(\frac{x^3}{3!}\right)\sin y.$$

Untuk menghitung u_2, perhatikan bahwa

$$u_2 = \xi_{0,2} + x\xi_{1,2} + {L_x}^{-1} L_y u_1$$

dengan

$$L_y u_1 = \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\left(\frac{\pi}{2}\right) x \sin y /3! - \left(\frac{2}{\pi}\right)\left(\frac{x^3}{3!}\right)\sin y\right)$$

$$= \left(\frac{2}{\pi}\right)\left(\frac{x^3}{3!}\right)\sin y - \left(\frac{\pi}{2}\right) x \sin y / 3!$$

$$L_x{}^{-1} L_y u_1 = \int_0^x \int_0^x \left(\frac{2}{\pi}\right)\left(\frac{s^3}{3!}\right)\sin y - \left(\frac{\pi}{2}\right) x \sin y / 3!\, dsds$$

$$= \int_0^x \int_0^x \left(\frac{2}{\pi}\right)\left(\frac{s^3}{3!}\right)\sin y\, dsds - \int_0^x \int_0^x \left(\frac{\pi}{2}\right) s \sin y / 3!\, dsds$$

$$= \left(\frac{2}{\pi}\right)\sin y \int_0^x \int_0^x \left(\frac{s^3}{3!}\right) dsds - \left(\frac{\pi}{2}\right)\frac{\sin y}{3!}\int_0^x \int_0^x s\, dsds$$

$$= \left(\frac{2}{\pi}\right)\sin y \left(\frac{x^5}{5!}\right) - \left(\frac{\pi}{2}\right)\frac{\sin y}{3!}\left(\frac{x^3}{3!}\right)$$

$$= \left(\frac{2}{\pi}\right)\left(\frac{x^5}{5!}\right)\sin y - \left(\frac{\pi}{2}\right)\left(\frac{x^3}{(3!)^2}\right)\sin y.$$

Sehingga

$$u_2 = \xi_{0,2} + x\xi_{1,2} + \left(\frac{2}{\pi}\right)\left(\frac{x^5}{5!}\right)\sin y - \left(\frac{\pi}{2}\right)\left(\frac{x^3}{(3!)^2}\right)\sin y.$$

Pendekatan suku ketiga diberikan sebagai:

$$\varphi_3 = u_0 + u_1 + u_2$$

$$= \left(\frac{2}{\pi}\right) x \sin y + \left(\frac{\pi}{2}\right) x \sin y / 3! - \left(\frac{2}{\pi}\right)\left(\frac{x^3}{3!}\right)\sin y + \left(\frac{2}{\pi}\right)\left(\frac{x^5}{5!}\right)\sin y$$

$$- \left(\frac{\pi}{2}\right)\left(\frac{x^3}{(3!)^2}\right)\sin y + \xi_{0,2} + x\xi_{1,2}$$

dengan $\varphi_3(0, y) = 0$ dan $\varphi_3\left(\frac{\pi}{2}, y\right) = \sin y.$

Karena $\varphi_3(0, y) = 0$, didapatkan

$$\varphi_3(0, y) = \left(\frac{2}{\pi}\right)(0).\sin y + \left(\frac{\pi}{2}\right)(0).\frac{\sin y}{3!} - \left(\frac{2}{\pi}\right)\left(\frac{(0)^3}{3!}\right)\sin y$$

$$+ \left(\frac{2}{\pi}\right)\left(\frac{(0)^5}{5!}\right)\sin y - \left(\frac{\pi}{2}\right)\left(\frac{(0)^3}{(3!)^2}\right)\sin y + \xi_{0,2} + (0).\xi_{1,2}$$

$$\xi_{0,2} = 0$$

Karena $\varphi_3\left(\frac{\pi}{2}, y\right) = \sin y$, didapatkan

$$\varphi_3\left(\frac{\pi}{2}, y\right) = \left(\frac{2}{\pi}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right).\sin y + \left(\frac{\pi}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right).\frac{\sin y}{3!} - \left(\frac{2}{\pi}\right)\left(\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^3}{3!}\right)\sin y$$

$$+ \left(\frac{2}{\pi}\right)\left(\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^5}{5!}\right)\sin y - \left(\frac{\pi}{2}\right)\left(\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^3}{(3!)^2}\right)\sin y + \xi_{0,2} + \left(\frac{\pi}{2}\right).\xi_{1,2}$$

$$\sin y = \sin y + \left(\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{3!}\right)\sin y - \left(\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{3!}\right)\sin y + \left(\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^4}{5!}\right)\sin y$$
$$- \left(\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^4}{(3!)^2}\right)\sin y + \left(\frac{\pi}{2}\right).\xi_{1,2}$$
$$\left(\frac{\pi}{2}\right).\xi_{1,2} = \left(\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^4}{(3!)^2}\right)\sin y - \left(\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^4}{5!}\right)\sin y$$
$$\xi_{1,2} = \left(\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^3}{(3!)^2}\right)\sin y - \left(\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^3}{5!}\right)\sin y.$$

Sehingga

$$u_2 = \xi_{0,2} + x\xi_{1,2} + \left(\frac{2}{\pi}\right)\left(\frac{x^5}{5!}\right)\sin y - \left(\frac{\pi}{2}\right)\left(\frac{x^3}{(3!)^2}\right)\sin y$$
$$= \left(\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^3}{(3!)^2}\right)x\sin y - \left(\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^3}{5!}\right)x\sin y + \left(\frac{2}{\pi}\right)\left(\frac{x^5}{5!}\right)\sin y$$
$$- \left(\frac{\pi}{2}\right)\left(\frac{x^3}{(3!)^2}\right)\sin y$$

Perhatikan bahwa didapatkan suku-suku dari u adalah

$$u_0 = \left(\frac{2}{\pi}\right)x\sin y,$$
$$u_1 = \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)x\sin y}{3!} - \left(\frac{2}{\pi}\right)\left(\frac{x^3}{3!}\right)\sin y,$$
$$u_2 = \left\{\left(\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^3}{(3!)^2}\right) - \left(\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^3}{5!}\right)\right\}x\sin y + \left(\frac{2}{\pi}\right)\left(\frac{x^5}{5!}\right)\sin y - \left(\frac{\pi}{2}\right)\left(\frac{x^3}{(3!)^2}\right)\sin y$$
$$\vdots$$

Dan pendekatan solusi $\varphi_1,\ \varphi_2,\ \varphi_3, \ldots$ adalah

$$\varphi_1 = \left(\frac{2}{\pi}\right)x\sin y = (0.6366198)x\sin y$$
$$\varphi_2 = \left(\frac{2}{\pi} + \left(\frac{\pi}{2}\right)/3!\right)x\sin y + \left(\frac{2}{\pi}\right)\left(-\frac{x^3}{3!}\right)\sin y$$
$$= (0.8984192)x\sin y + (0.6366198)\left(-\frac{x^3}{3!}\right)\sin y$$

$$\varphi_3 = \frac{1}{(\pi/2) + \frac{(\pi/2)}{3!} - \frac{(\pi/2)^3}{5!} + \frac{(\pi/2)^3}{(3!)^2}} x \sin y$$
$$+ \frac{1}{(\pi/2) + \frac{(\pi/2)}{3!}} \left(\frac{-x^3}{3!}\right) \sin y + \frac{1}{(\pi/2)} \left(\frac{x^5}{5!}\right) \sin y$$
$$= (0.9737817) x \sin y + (0.8984192) \left(\frac{-x^3}{3!}\right) \sin y$$
$$+ (0.6366198) \left(\frac{x^5}{5!}\right) \sin y$$
$$\vdots$$

yang konvergen dengan sangat cepat dengan solusi yang diberikan. Sehingga solusi dapat ditulis sebagai

$$\varphi_n = a_{n,0} x \sin y + a_{n,1} \left(\frac{-x^3}{3!}\right) \sin y + a_{n,2} \left(\frac{x^5}{5!}\right) \sin y + \cdots$$

atau

$$\varphi_n = \sum_{m=0}^{n-1} a_{n,m} \frac{(-1)^m (x^{2m+1})}{(2m+1)!} \sin y$$

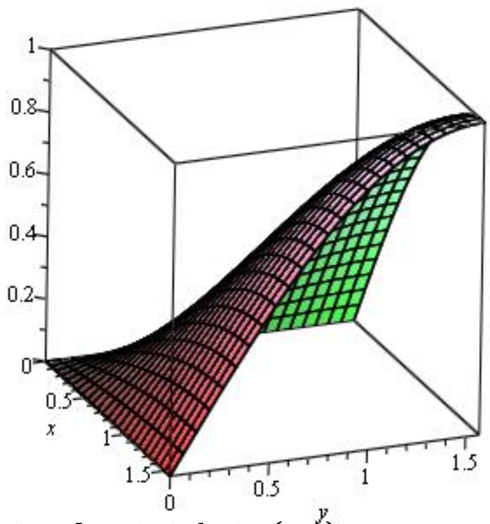
dengan $a_{n,m}$ adalah barisan numerik yang hasil jumlahnya mendekati 1. Sehingga

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{m=0}^{n-1} a_{n,m} \frac{(-1)^m (x^{2m+1})}{(2m+1)!} \sin y$$

dengan $\lim_{n\to\infty} a_{n,m} = 1$ untuk semua n.

Sehingga didapatkan solusi untuk persamaan (3.12) adalah

$$u = \lim_{n\to\infty} \varphi_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{m=0}^{n-1} \left\{\frac{(-1)^m (x^{2m+1})}{(2m+1)!}\right\} \sin y = \sin x \sin y.$$



Gambar 2. Solusi $u(x, y) = \sin x \sin y$

Contoh 3: Persamaan Diferensial Parsial Linier Tipe Parabola

Diberikan persamaan diferensial parsial

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad x \geq 0 \tag{12}$$

dengan kondisi batas:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = e^t, \qquad t > 0,$$

dan kondisi awal:

$$u(0,x) = \varphi(x) = e^x, \qquad x > 0$$

(Lahzar, 2014)

Dengan menggunakan metode dekomposisi Adomian, didefinisikan $L_x(.) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(.)$ sehingga persamaan (12) dapat ditulis menjadi

$$L_x u = \frac{\partial u}{\partial t} \tag{13}$$

Kemudian definisikan invers dari operator linier L_x sebagai $L_x^{-1}(.) = \int_0^x \int_0^x (.)\, dsds$. Terapkan operator invers linier L_x^{-1} pada persamaan (13) diperoleh

$$L_x^{-1} L_x u = L_x^{-1} \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$u(t,x) - x\frac{\partial u}{\partial x}(t,0) - u(t,0) = \int_0^x \int_0^x \frac{\partial u}{\partial t} dsds$$

$$u(t,x) = u(t,0) + x\frac{\partial u}{\partial x}(t,0) + \int_0^x \int_0^x \frac{\partial u}{\partial t} dsds \tag{14}$$

Substitusikan kondisi batas $\frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = e^t$ ke dalam persamaan (14), sehingga persamaan (14) dapat ditulis sebagai:

$$u(t,x) = A(t) + e^t x + \int_0^x \int_0^x \frac{\partial u}{\partial t} dsds. \tag{15}$$

dengan $A(t)$ adalah merupakan kondisi batas yang tidak diketahui yang akan ditentukan.

Definisikan solusi $u(t,x)$ sebagai $u(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t,x)$.

Akibatnya suku u_n dapat ditentukan dengan menetapkan skema rekursi

$$u_0 = A(t) + e^t x$$

$$u_{n+1} = \int_0^x \int_0^x \frac{\partial u_n}{\partial t} dsds \qquad , n \geq 0 \tag{16}$$

untuk menentukan solusi $u(t,x)$. Sehingga dari persamaan (16) didapatkan suku $u_0(t,x), u_1(t,x), u_2(t,x), \ldots$ sebagai

$$u_0 = A(t) + e^t x$$

$$u_1 = \int_0^x \int_0^x \frac{\partial u_0}{\partial t} dsds = \int_0^x \int_0^x A'(t) + e^t s\, dsds = A'(t)\frac{x^2}{2!} + e^t \frac{x^3}{3!} \tag{17}$$

$$u_2 = \int_0^x \int_0^x \frac{\partial u_1}{\partial t} dsds = \int_0^x \int_0^x A''(t)\frac{s^2}{2!} - e^t \frac{s^3}{3!} dsds = A'(t)\frac{x^4}{4!} + e^t \frac{x^5}{5!}$$

$$\vdots$$

Sehingga dengan mensubstitusi persamaan (17) ke dalam bentuk $u(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t,x)$ didapatkan solusi

$$u(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} A^{(n)}(t)\frac{x^{2n}}{(2n)!} + e^{t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}. \qquad \textbf{(18)}$$

Kemudian untuk mencari kondisi batas $A(t)$ yang tidak diketahui, digunakan kondisi awal $(0,x) = \varphi(x)$. Dengan mensubstitusi $t = 0$ ke persamaan (16) dan mengggunakan perluasan deret Taylor dari fungsi $\varphi(x)$ didapatkan

$$u(0,x) = \sum_{n=0}^{\infty} A^{(n)}(0)\frac{x^{2n}}{(2n)!} + e^{0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\varphi^{(n)}(0)\frac{x^{n}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} A^{(n)}(0)\frac{x^{2n}}{(2n)!} + e^{0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}. \qquad \textbf{(19)}$$

Dengan menyamakan koefisien pangkat x di kedua sisi (19) dan dengan mempertimbangkan kondisi kecocokan diperoleh

$$e^{0} = \varphi^{(2n+1)}(0), \qquad n \geq 0$$

dan

$$A^{(n)}(0) = \varphi^{(2n)}(0), \qquad n \geq 0$$

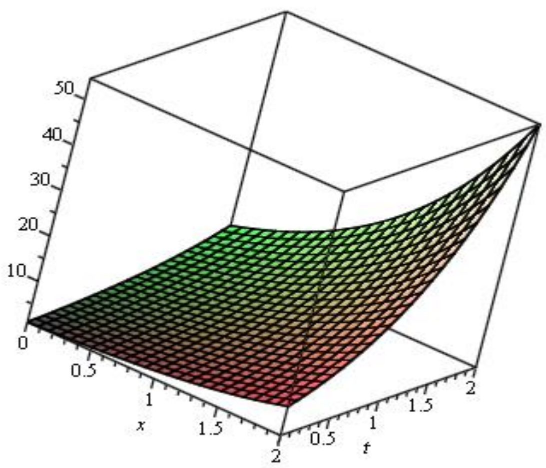
dengan demikian

$$A(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\varphi^{(2n)}(0)\frac{t^{n}}{(n)!} \qquad \textbf{(20)}$$

Jika ditetapkan $\varphi(x) = e^{x}$, diperoleh nilai $A(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \cdots = e^{t}$.

Sehingga solusi (18) dapat ditulis menjadi

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \sum_{n=0}^{\infty} A^{(n)}(t)\frac{x^{2n}}{(2n)!} + e^{t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= e^{t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!} + e^{t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= e^{t}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n}}{(n)!}\right) = e^{t}e^{x}. \end{aligned}$$



Gambar 3 Solusi $u(t,x) = e^{t+x}$

Contoh 3.4 Persamaan Diferensial Parsial Linier Tipe Ellips

Diberikan persamaan diferensial parsial linier

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2u, \qquad 0 < x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \qquad (21)$$

dengan kondisi batas

$$u(0,y) = e^y$$
$$\frac{\partial u(0,y)}{\partial x} = 0.$$

(Biazar, 2010)

Dengan menggunakan metode dekomposisi Adomian, didefinisikan $L_x(.) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(.)$ sehingga persamaan (21) dapat ditulis menjadi

$$L_x u = 2u - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad (22)$$

Kemudian definisikan invers dari operator linier L_x sebagai $L_x^{-1}(.) = \int_0^x \int_0^x (.)\, dsds$.Terapkan operator invers linier L_x^{-1} pada persamaan (22) diperoleh

$$L_x^{-1} L_x u = L_x^{-1}\left(2u - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

$$u(x,y) - x\frac{\partial u}{\partial x}(0,y) - u(0,y) = \int_0^x \int_0^x \left(2u - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) dsds$$
$$u(x,y) = u(0,y) + x\frac{\partial u}{\partial x}(0,y) + \int_0^x \int_0^x \left(2u - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) dsds \qquad (23)$$

Dengan mensubtitusi kondisi batas ke dalam persamaan (23) diperoleh

$$u(x,y) = e^y + \int_0^x \int_0^x \left(2u - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) dsds$$

Definisikan solusi $u(x,y)$ sebagai $u(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,y)$.
Sehingga suku u_n dapat ditentukan dengan menetapkan skema rekursi
$u_0 = e^y$

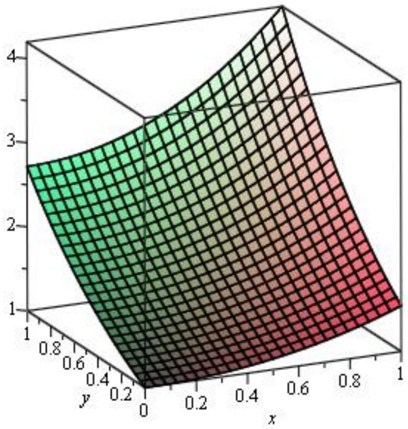
$$u_{n+1} = \int_0^x \int_0^x \left(2u_n - \frac{\partial^2 u_n}{\partial y^2}\right) dsds, \qquad n \geq 0 \qquad (24)$$

untuk menentukan solusi $u(x,y)$. Sehingga dari persamaan (24) didapatkan suku $u_0(x,y), u_1(x,y), u_2(x,y), \ldots$ sebagai

$$u_0 = e^y$$
$$u_1 = \int_0^x \int_0^x \left(2u_0 - \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}\right) dsds = \frac{1}{2}x^2 e^y$$
$$u_2 = \int_0^x \int_0^x \left(2u_1 - \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}\right) dsds = \frac{1}{24}x^4 e^y$$
$$u_3 = \int_0^x \int_0^x \left(2u_2 - \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2}\right) dsds = \frac{1}{720}x^6 e^y \qquad (25)$$
$$\vdots$$

Sehingga dengan mensubstitusi persamaan (25) ke dalam bentuk $\mathrm{u}(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{u_n}(\mathrm{x},\mathrm{y})$ didapatkan solusi untuk persamaan (21) yaitu

$$\begin{aligned}\mathrm{u}(\mathrm{x},\mathrm{y}) &= \mathrm{e^y} + \frac{1}{2}\mathrm{x^2 e^y} + \frac{1}{24}\mathrm{x^4 e^y} + \frac{1}{720}\mathrm{x^6 e^y} + \cdots \\ &= \mathrm{e^y}\left(1 + \frac{1}{2}\mathrm{x^2} + \frac{1}{24}\mathrm{x^4} + \frac{1}{720}\mathrm{x^6} + \cdots\right) = \mathrm{e^y}\cosh(\mathrm{x}).\end{aligned}$$



Gambar 4 Solusi $\mathrm{u}(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \mathrm{e^y}\cosh(\mathrm{x})$

Contoh 5: Persamaan Diferensial Parsial Nonlinier
Diberikan persamaan diferensial parsial nonlinier

$$\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{t}} = \mathrm{u}\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}}, \qquad 0 < x \leq 1, 0 \leq t \leq 1, \qquad \textbf{(26)}$$

dengan kondisi awal

$$\mathrm{u}(\mathrm{x},0) = \frac{\mathrm{x}}{10}, \qquad 0 < x \leq 1$$

(Ali, 2008)

Dengan menggunakan metode dekomposisi Adomian, didefinisikan $L(.) = \frac{\partial}{\partial t}(.)$ sehingga persamaan (3.29) dapat ditulis menjadi

$$Lu = u\frac{\partial u}{\partial x} \qquad \textbf{(27)}$$

Kemudian definisikan invers dari operator linier L sebagai $\mathrm{L^{-1}}(.) = \int_0^{\mathrm{t}}(.)\,\mathrm{dt}$.Terapkan operator invers linier $\mathrm{L^{-1}}$ pada persamaan (27) diperoleh

$$\mathrm{L^{-1}Lu} = \mathrm{L^{-1}}\left(\mathrm{u}\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}}\right)$$

$$\mathrm{u}(\mathrm{x},\mathrm{t}) - \mathrm{u}(\mathrm{x},0) = \mathrm{L^{-1}}\left(\mathrm{u}\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}}\right)$$

$$\mathrm{u}(\mathrm{x},\mathrm{t}) = \mathrm{u}(\mathrm{x},0) + \mathrm{L^{-1}}\left(\mathrm{u}\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}}\right) \qquad \textbf{(28)}$$

Definisikan solusi $u(x,t)$ sebagai $u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t)$.

Setelah itu akan dicari polynomial Adomian sebagai berikut:

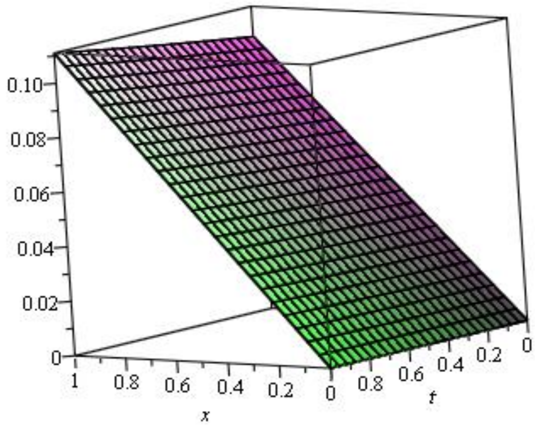
$$A_0 = f(u_0) = u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x}$$
$$A_1 = u_1 \left(\frac{d}{du_0}\right) f(u_0) = u_1 \frac{\partial u_0}{\partial x} + u_0 \frac{\partial u_1}{\partial x}$$
$$A_2 = u_2 \left(\frac{d}{du_0}\right) f(u_0) + \left(\frac{{u_1}^2}{2!}\right)\left(\frac{d^2}{d{u_0}^2}\right) f(u_0) = u_2 \frac{\partial u_0}{\partial x} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + u_0 \frac{\partial u_2}{\partial x}$$
$$\vdots$$

Sehingga dapat dibentuk solusi u_n sebagai berikut

$$u_0 = \frac{x}{10}$$
$$u_1 = L^{-1}A_0 = \int_0^t \frac{x}{10}.\frac{1}{10}\, dt = \frac{x}{10}\left(\frac{t}{10}\right),$$
$$u_2 = L^{-1}A_1 = \int_0^t \frac{2x}{10}.\frac{s}{(10)^2}\, ds = \left[\frac{2}{2}\frac{x}{10}\frac{s^2}{(10)^2}\right]_0^t = \frac{x}{10}\frac{t^2}{(10)^2},$$
$$\vdots$$
$$u_n = \frac{x}{10}\frac{t^n}{(10)^n}$$

Kemudian substitusi solusi u_n ke dalam bentuk $u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t)$. Sehingga didapatkan solusi dari persamaan (26) yaitu

$$u(x,t) = \frac{x}{10} + \frac{x}{10}\left(\frac{t}{10}\right) + \frac{x}{10}\frac{t^2}{(10)^2} + \cdots = \frac{x}{10}\left(\frac{t}{10} + \frac{t^2}{(10)^2} + \frac{t^3}{(10)^3} + \cdots\right)$$
$$= -\frac{x}{(t-10)}$$



Gambar 5 Solusi $u(x,t) = -\frac{x}{(t-10)}$

PENUTUP

Kesimpulan

Langkah-langkah umum menyelesaikan persamaan diferensial parsial dengang menggunakan metode dekomposisi Adomian

1) Menuliskan persamaan diferensial parsial dalam bentuk operator linier
$$L_x u + L_t u + Nu = 0 \tag{29}$$

dengan L_x dan L_t merupakan operator linier yang mudah ditentukan inversnya, dan Nu dimisalkan bersifat analitik yang diselesaikan dengan menggunakan polynomial Adomian.

2) Terapkan invers operator linier $L_x{}^{-1}$ ke persamaan (29) dengan $L_x{}^{-1}$ adalah adalah integral rangkap-n terhadap t sehingga didapatkan solusi
$$u = \phi_x - L_x{}^{-1} L_t u - L_x{}^{-1} N u$$
dengan $\phi_x = \xi_0(t) + x\xi_1(t)$. Yang mana $\xi_0(t)$ dan $\xi_1(t)$ merupakan koefisien yang sesuai dengan kondisi batas yang sudah diberikan.
3) Misalkan $u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$ dan $Nu = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$ dengan A_n adalah polynomial Adomian yang didefinisikan untuk Nu. Suku u_0 biasanya dianggap sebagai ϕ_x (atau $\phi_x + L_x{}^{-1} g$ jika persamaan diferensial berbentuk tak homogen).
4) Mencari relasi rekursi u_n dengan
$$u_0 = \phi_x$$
$$u_1 = -L_x{}^{-1} L_t u_0 - L_x{}^{-1} A_0$$
$$u_2 = -L_x{}^{-1} L_t u_1 - L_x{}^{-1} A_1$$
$$\vdots$$
5) Nyatakan solusi dalam bentuk
$$u = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots = \phi_x - \sum_{n=0}^{\infty} L_x{}^{-1} L_t u_n - \sum_{n=0}^{\infty} L_x{}^{-1} A_n.$$

Dapat juga digunakan pendekatan yang agak berbeda. Pendekatan ini dikenal sebagai dekomposisi ganda yang mana ϕ_x akan didekomposisikan juga. Pada kasus ini dapat ditulis:
$$\phi_{x,m} = \xi_{0,m}(t) + x\xi_{1,m}(t)$$
dan
$$u_0 = \phi_{x,0}$$
Maka akan didapatkan relasi rekursi untuk u_{m+1} sebagai:
$$u_{m+1} = -L_x{}^{-1} L_t u_m - L_x{}^{-1} A_n \qquad , m \geq 1$$
Setelah relasi rekursif u_n didapatkan, maka solusi dari persamaan (4.1) yaitu
$$u(x,t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{m} \left(-L_x{}^{-1} L_t\right)^n \phi_{x,m-n} - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{m-1} \left(-L_x{}^{-1} L_t\right)^{m-1-n} L_x{}^{-1} A_n.$$
Langkah-langkah penyelesaian persamaan diferensial parsial linier dan persamaan diferensial parsial nonlinier dengan menggunakan metode dekomposisi Adomian sama dengan menyelesaikan persamaan diferensial parsial secara umum, hanya terdapat perbedaan untuk menyelesaikan suku linier dan nonlinier.

Saran

Dari hasil yang diperoleh, sebaiknya mahasiswa diberi materi tentang metode dekomposisi Adomian sebagai metode alternatif untuk menyelesaikan persamaan diferensial parsial. Dengan demikian penulis berharap agar penilitian selanjutnya dapat menggunakan metode dekomposisi Adomian untuk menyelesaikan permasalahan fisika yang menggunakan model persamaan diferensial parsial seperti persamaan Maxwell, hukum Newton, persamaan Navier-Stokes, dan permasalahan Stefan. Selain itu, dapat juga menambahkan perhitungan numerik sehingga diperoleh perbandingan hasil dari perhitungan secara analitik dan perhitungan numerik.

DAFTAR PUSTAKA

Adomian, G. 1994. *Solving Frontier Problems of Physics: The Decomposition Method*. Kluwer Academic Publisher Boston.

Biazar, J. dan Niroomand S. 2010. An Analytic Approximation to the Solution of Elliptic Equations and Comparing the Results with Crank-Nicolson Method.(Online), (http://www.m-hikari.com/ijcms-2010/21-24-2010/biazarIJCMS21-24-2010.pdf) diakses pada 10 Juli 2015.

Farlow, Stanley J. 1982. *Partial Differential Equations for Scientist and Engineers*. New York: Dover Publications, Inc.

Lazhar, Bougoffa. 2014. On the Solutions of a Stefan Problem with Variable Latent Heat.(Online), (http://www.hindawi.com/journals/mpe/2014/180764.pdf) diakses pada 11 September 2014.