PELABELAN KOMBINASI DARI GRAPH KOMBINASI PADA GRAPH SIKEL (C_n), GRAPH WHEEL (W_n), DAN GRAPH GENERALIZED PETERSEN $(GP(n,2))$

Siti Retna Sari[1]
Sapti Wahyuningsih[2]
FMIPA Universitas Negeri Malang
E-mail: siretascorpio@yahoo.com/angel.retna@gmail.com

Abstrak: Pelabelan pada suatu graph adalah pemetaan yang memetakan unsur-unsur graph yaitu himpunan titik, himpunan sisi, maupun himpunan titik dan sisi ke suatu bilangan (biasanya bilangan bulat positif atau non negatif) yang disebut label. Graph $G = (V, E)$ adalah graph sederhana, terhubung, dan takberarah dengan n titik dan m sisi. Graph G disebut graph kombinasi jika ada fungsi bijektif $f : V(G) \longrightarrow \{1, 2, 3, \dots, n\}$ yang melabeli titik-titik di G. Pelabelan titik f mengakibatkan pelabelan sisi $g_f : E(G) \longrightarrow \mathcal{N}$ yang didefinisikan sebagai berikut: untuk setiap $uv \in E(G)$ dengan $f(u) > f(v)$ berlaku pelabelan fungsi $g_f\ (uv) = {}^{f(u)}C_{f(v)}$ yang injektif. Pelabelan g_f disebut pelabelan kombinasi dari graph G yang diakibatkan oleh pelabelan f. Dari definisi, graph kombinasi adalah graph yang dapat dikenakan pelabelan kombinasi. Pelabelan kombinasi dari graph kombinasi merupakan pelabelan jenis baru, sehingga pada skripsi ini akan dianalisa pelabelan titik-titik dari suatu graph sedemikian sehingga mengakibatkan pelabelan kombinasi pada sisi-sisi graph sikel (C_n), graph wheel (W_n), dan graph generalized petersen $(GP(n, 2))$ sehingga graph sikel (C_n), graph wheel (W_n), dan graph generalized petersen $(GP(n, 2))$ merupakan graph kombinasi. Dengan menganalisa pelabelan titik-titik, maka dapat ditentukan pelabelan kombinasi untuk n yang cukup besar.

Kata Kunci: pelabelan kombinasi, graph kombinasi, graph sikel (C_n), graph wheel (W_n), graph generalized petersen $(GP(n, 2))$

Abstract: A labeling on a graph is a mapping that maps the elemens of a graph that is either a set of vertices, a set of edges, or a set of vertices and edges to a number (usually a positive or non negative integers) is called label. Graph $G = (V, E)$ is a simple, connected, undirected graph with n vertices and m edges. Graph G is said to be a combination graph if there is a bijection $f : V(G) \longrightarrow \{1, 2, 3, \dots, n\}$ which labels the vertices of G. The vertex-labeling f induces an edge-labeling $g_f : E(G) \longrightarrow \mathcal{N}$ defined as follows: an edge $uv \in E(G)$ with $f(u) > f(v)$ is assigned the label $g_f\ (uv) = {}^{f(u)}C_{f(v)}$ is injective. The labeling g_f is called the combination labeling of G induced by the labeling f. From the definition, a combination graph is a graph that contain a combination labeling. A combination labeling of a combination graph is a new kind of labeling, so that will be analyzed, in this thesis, vertex labeling of a graph such that induces combination labeling on edges of cycle graph (C_n), wheel graph (W_n), and generalized petersen graph $(GP(n, 2))$ so that cycle graph (C_n), wheel graph (W_n), and generalized petersen graph $(GP(n, 2))$ is a combination graph. By analyzing vertex labeling, it can be determined combination labeling for n large enough.

Keyword: combination labeling, combination graph, Cycle Graph $(\mathrm{C_n})$,Wheel Grap $(\mathrm{W_n})$, and Generalized Petersen Graph $(\mathrm{GP(n, 2)})$

1. Siti Retna Sari adalah mahasiswa jurusan Matematika FMIPA Universitas Negeri Malang
2. Sapti Wahyuningsih adalah dosen jurusan Matematika FMIPA Universitas Negeri Malang

Salah satu topik yang dapat dikaji dalam bidang teori graph adalah pelabelan. Secara umum, pelabelan pada suatu graph adalah pemetaan yang memetakan unsur-unsur graph yaitu himpunan titik, himpunan sisi, maupun himpunan titik dan sisi ke suatu bilangan (biasanya bilangan bulat positif atau non negatif) yang disebut label (Wallis dkk, 2002). Aplikasi pelabelan graph dapat dijumpai pada berbagai bidang diantaranya dekomposisi graph, kriptografi, analisis kristalografi *X-Ray*, optimasi rancangan sirkuit dan radio-astronomi, krisis energi, dan teori pengkodean. Aplikasi pelabelan graph dapat dijumpai juga pada pelabelan jaringan komunikasi (*Communication Network Labeling)*, dalam jaringan komunikasi yang kecil, pelabelan berguna untuk menentukan setiap subyek "sejumlah node" pengguna terminal ke kendala (*constraint*) yang menghubungkan setiap sisi (*link* komunikasi) dengan nomor yang berbeda. Dengan cara ini, nomor-nomor dari setiap dua terminal yang berkomunikasi secara otomatis menentukan nomor *link* dari *path* yang terhubung; dan sebaliknya, nomor *path* secara unik menentukan pasangan dari pengguna terminal yang sambungannnya saling berhubungan (Hedge, 2012). Dalam jurnal yang berjudul *a Dynamic Survey Of Graph Labeling*, Gallian (2011) menyebutkan beberapa pelabelan pada graph, diantaranya pelabelan graceful, pelabelan$-\gamma$, pelabelan ajaib, dan pelabelan kombinasi.

Dalam jurnal Moussa (2010) Rosa mendefinisikan pelabelan graceful pada graph G dengan q sisi merupakan pemetaan injektif dari himpunan titik di G ke himpunan $\{0,1,2,3,\ldots,q\}$ sedemikian sehingga masing-masing sisi uv mendapat label $|f(u)-f(v)|$, menghasilkan label sisi yang berbeda semua. Kotzig dan Rosa dalam Gallian (2011) mendefinisikan pelabelan ajaib dari suatu graph G adalah fungsi bijektif dari $V \cup E$ ke $\{1,2,3,\ldots,|V \cup E|\}$, sehingga untuk setiap sisi $xy \in G$ berlaku $f(x)+f(y)+f(xy)=k$, dengan k konstanta. Chartrant *et al* (2005) dalam *Buletin of ICA* mendefinisikan pelabelan$-\gamma$ pada graph G dengan n titik dan m sisi merupakan fungsi injektif $f: V(G) \rightarrow \{0,1,2,3,\ldots,m\}$ yang menghasilkan pelabelan $f': E(G) \rightarrow \{1,2,3,\ldots,m\}$ pada sisi-sisi dari G yang didefinisikan oleh $f'(e)=|f(u)-f(v)|$ untuk setiap sisi $e=uv \in G$. Sedangkan pelabelan kombinasi dari graph kombinasi adalah pelabelan baru yang mulai diperkenalkan pada tahun 2006 oleh Hedge dan Shetty dalam jurnalnya yang berjudul *Combinatorial Labelings Of Graphs* dan konsep awal graph kombinasi ini diharapkan banyak membantu dalam kehidupan nyata. Li (2012) menyatakan bahwa jika ada pelabelan kombinasi pada suatu graph dan dalam graph tersebut juga dapat ditentukan pelabelan graceful, maka akan lebih mudah menentukan pelabelan kombinasi dari pada pelabelan graceful pada graph tersebut dengan cara membandingkan pelabelan titik-titik yang mungkin pada graph tersebut. Hal ini memberikan gagasan untuk mengkaji lebih lanjut tentang pelabelan kombinasi dari graph kombinasi karena pelabelan kombinasi bisa dijadikan sebagai alternatif pelabelan.

Tujuan dari penulisan artikel ini adalah: (a) Mendeskripsikan syarat cukup graph kombinasi pada graph sikel (C_n) dan pendefinisian pelabelan titik-titik pada graph sikel (C_n) agar menjadi pelabelan kombinasi sehingga graph sikel (C_n) merupakan graph kombinasi (b) Mendeskripsikan syarat cukup graph kombinasi pada graph wheel (W_n) dan pendefinisian pelabelan titik-titik pada graph wheel (W_n) agar menjadi pelabelan kombinasi sehingga graph wheel (W_n) merupakan graph kombinasi (c) Mendeskripsikan syarat cukup graph kombinasi pada graph generalized petersen ($GP(n,2)$) dan pendefinisian pelabelan titik-titik pada graph generalized petersen ($GP(n,2)$) agar menjadi pelabelan kombinasi sehingga graph generalized petersen ($GP(n,2)$) merupakan graph kombinasi.

Sebelum memulai pembahasan, berikut ini akan dipaparkan beberapa definisi yang akan dijadikan sebagai bahan referensi. Pembahasan pada artikel ini hanya dilakukan pada graph sederhana, terhubung, dan takberarah.

Graph sikel

Graph sikel adalah graph yang terdiri dari suatu sikel tunggal dari titik dan sisi. Graph sikel dengan n titik dinotasikan dengan C_n. Panjang sikel dari graph C_n adalah n. Secara umum graph C_n mempunyai n titik dan m sisi dengan $n = m$, atau dengan kata lain order dari graph C_n sama dengan ukurannya.

Graph Wheel

Misal n bilangan bulat positif lebih dari 2. **Graph wheel** pada $n+1$ titik adalah graph yang memuat sikel dengan panjang n dan titik tidak pada sikel yang adjacent ke setiap titik pada sikel. Graph ini dinotasikan dengan W_n. Secara umum graph W_n mempunyai $n+1$ titik dan $2n$ sisi.

Graph Generalized Petersen

Andaikan k, n bilangan bulat positif sedemikian hingga $n > 2k$. **Graph Generalized Petersen**, dinotasikan dengan $GP(n,k)$, adalah graph sederhana dengan titik-titik $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$ dan sisi-sisi $u_i v_i, u_i u_{i+1}, v_i v_{i+1}, u_1 u_n, v_1 v_n$, $1 \leq i < n$. Secara umum $GP(n,k)$ memiliki titik sebanyak $2n$ dan sisi sebanyak $3n$. Jika $GP(n,k)$ dengan $k = 2$, maka $n > 4$ dan dinotasikan dengan $GP(n,2)$.

Graph Kombinasi

$G = (V, E)$ adalah graph terhubung, sederhana, tak berarah, dengan n titik dan m sisi. ***G* graph kombinasi** jika ada fungsi bijektif $f : V(G) \longrightarrow \{1, 2, 3, \dots, n\}$ yang melabeli titik-titik di G sedemikian hingga pelabelan titik f mengakibatkan pelabelan sisi $g_f : E(G) \longrightarrow \mathcal{N}$ dari graph G yang didefinisikan sebagai berikut:

$$g_f\,(uv) = \begin{cases} {}^{f(u)}C_{f(v)}\,, & jika\ f(u) > f(v) \\ {}^{f(v)}C_{f(u)}\,, & jika\ f(v) > f(u) \end{cases}$$

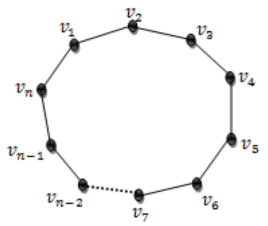
yang injektif dengan $uv \in E(G)$. Pelabelan g_f disebut **pelabelan kombinasi** dari G yang diakibatkan oleh pelabelan f

HASIL DAN PEMBAHASAN

Untuk mendeskripsikan syarat cukup graph kombinasi pada graph sikel (C_n) dan pendefinisian pelabelan titik-titik pada graph sikel (C_n) agar menjadi pelabelan kombinasi sehingga graph sikel (C_n) merupakan graph kombinasi, berikut akan dibahas teorema tentang graph kombinasi pada graph sikel (C_n) serta pembuktiannya kemudian analisa pelabelan titik-titik pada graph sikel (C_n) agar menjadi pelabelan kombinasi sehingga graph sikel (C_n) merupakan graph kombinasi. Selain itu juga akan ditunjukkan bahwa C_3 bukan merupakan graph kombinasi. Pembuktian pada Teorema 1 diambil dari jurnal Hedge & Shetty (2006) yang telah dilengkapi dengan ilustrasi gambar dan perhitungan kombinasi pada setiap sisi graph C_n, sedangkan pembuktian pada Teorema 2 tidak diadaptasi dari sumber manapun. Teorema 2 dibuktikan dengan menunjukkan bahwa untuk semua pelabelan titik yang mungkin pada C_3, tidak berlaku pelabelan kombinasi.

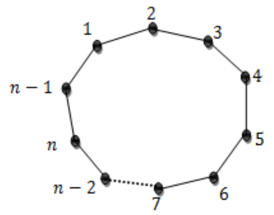
Teorema 1. (Hedge & Shetty, 2006)
Graph sikel C_n memuat pelabelan kombinasi untuk semua $n > 3$

Bukti:
Misal $n > 3$.
Dinotasikan titik – titik dari C_n sebagai $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$ secara berurutan, sedemikian sehingga v_1 adjacent ke v_n dan v_i adjacent ke v_{i+1} , untuk $1 \leq i \leq n-1$.



Gambar 3.1 Graph $\boldsymbol{C_n}$

Didefinisikan pelabelan fungsi
$f : \boldsymbol{V}(\boldsymbol{C_n}) \longrightarrow \{1,2,3,4,5,6,7, \ldots, n\}$ sebagai berikut:
$f(v_i) = i,\ jika\ i = 1,2,3, \ldots, n-2$
$f(v_{n-1}) = n$
$f(v_n) = n - 1$



Gambar 3.2 Graph $\boldsymbol{C_n}$ setelah pelabelan f

Sehingga f bijektif.

Perhatikan bahwa:

$g_f(1,2) = {}^{f(v_2)}C_{f(v_1)} = {}^{2}C_1 = 2$

$g_f(2,3) = {}^{f(v_3)}C_{f(v_2)} = {}^{3}C_2 = 3$

$g_f(3,4) = {}^{f(v_4)}C_{f(v_3)} = {}^{4}C_3 = 4$

$g_f(4,5) = {}^{f(v_5)}C_{f(v_4)} = {}^{5}C_4 = 5$

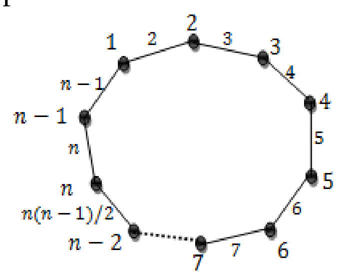
$g_f(5,6) = {}^{f(v_6)}C_{f(v_5)} = {}^{6}C_5 = 6$

$g_f(6,7) = {}^{f(v_7)}C_{f(v_6)} = {}^{7}C_6 = 7$

$\vdots$

$g_f(n-3, n-2) = {}^{f(v_{n-2})}C_{f(v_{n-3})} = {}^{n-2}C_{n-3} = n-2$
$g_f(n-2, n) = {}^{f(v_{n-1})}C_{f(v_{n-2})} = {}^{n}C_{n-2} = n(n-1)/2$
$g_f(n, n-1) = {}^{f(v_{n-1})}C_{f(v_n)} = {}^{n}C_{n-1} = n$
$g_f(n-1, 1) = {}^{f(v_n)}C_{f(v_1)} = {}^{n-1}C_1 = n-1$
Andaikan $\frac{n(n-1)}{2} = n - r$, untuk beberapa $r, 0 \leq r \leq n-2$
Perhatikan bahwa:
$\frac{n(n-1)}{2} = n - r$
$n^2 - n = 2n - 2r$
$n^2 - 3n + 2r = 0$
sehingga $n = \frac{3 \pm \sqrt{9-8r}}{2}$
jika $n = 3$, maka $9 - 8r = 9$
karena $n > 3$, maka $9 - 8r > 9$, sehingga didapat $r < 0$.
Hal ini kontradiksi dengan $0 \leq r$.
Sehingga $\frac{n(n-1)}{2} \neq n - r$, untuk semua $r, 0 \leq r \leq n-2$.
Sehingga nilai sisi pada graph C_n untuk $n > 3$, merupakan himpunan pasangan berbeda.
Jadi Graph sikel C_n memuat pelabelan kombinasi untuk semua $n > 3$.

Dari definisi graph kombinasi, maka didapat bahwa Graph sikel C_n merupakan graph kombinasi untuk semua $n > 3$.

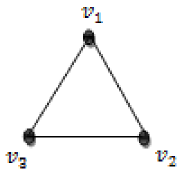


Gambar 3.3 Graph Kombinasi pada Graph $\boldsymbol{C_n}$

Teorema 1. ekuivalen dengan jika $n > 3$, maka C_n merupakan graph kombinasi. Karena pembahasan hanya pada graph sederhana, terhubung, dan takberarah, maka berikut ini akan ditunjukkan bahwa C_3 bukan merupakan graph kombinasi.

Teorema 2.
Jika $n = 3$, maka C_n bukan merupakan graph kombinasi.

Bukti:
$n = 3$
Dinotasikan titik – titik dari C_3 sebagai v_1, v_2, v_3 secara berurutan, sedemikian sehingga v_1 adjacent ke v_3 dan v_i adjacent ke v_{i+1} , untuk $1 \leq i \leq 2$

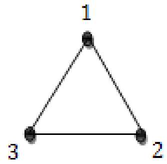


Gambar 3.4 Graph C_3

Didefinisikan pelabelan fungsi

$f : \boldsymbol{V(C_3)} \longrightarrow \{1,2,3\}$

Sehingga hanya ada 1 pelabelan titik yang mungkin pada graph C_3, yaitu:



Gambar 3.5 Graph C_3 setelah pelabelan f

Sehingga f bijektif.

Perhatikan bahwa:

$g_f(1,2) = {}^2C_1 = 2$

$g_f(2,3) = {}^3C_2 = 3$

$g_f(3,1) = {}^3C_1 = 3$

Karena label 3 muncul 2 kali dalam pelabelan g_f, maka g_f tidak injektif sehingga pelabelan g_f bukan pelabelan kombinasi.

Jika $n = 3$, maka C_n bukan merupakan graph kombinasi.

Untuk mendeskripsikan syarat cukup graph kombinasi pada graph wheel (W_n) dan pendefinisian pelabelan titik-titik pada graph wheel (W_n) agar menjadi pelabelan kombinasi sehingga graph wheel (W_n) merupakan graph kombinasi, berikut ini akan dibahas suatu teorema tentang graph kombinasi pada graph wheel (W_n) serta pembuktiannya kemudian analisa pelabelan titik-titik pada graph wheel (W_n) agar menjadi pelabelan kombinasi sehingga graph wheel (W_n) merupakan graph kombinasi. Pada Teorema 3 tidak dilakukan pembuktian, hanya saja akan diambil sampel yang mendukung Teorema 3 yaitu akan ditunjukkan bahwa W_4 bukan merupakan graph kombinasi. Selanjutnya akan diberikan lemma-lemma (tidak dibuktikan) yang mendukung pembuktian Teorema 4. Pembuktian pada Teorema 4 diadaptasi dari jurnal Li (2012) yang telah dilengkapi dengan ilustrasi gambar dan perhitungan kombinasi pada setiap sisi graph W_n. Pelabelan titik pada pembuktian Teorema 4 telah ditulis ulang dalam bentuk fungsi.

Teorema 3 (Hedge & Shetty, 2006)

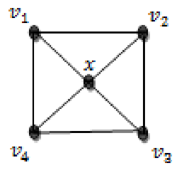
Graph wheel W_n bukan graph kombinasi untuk semua $n \leq 6$

Teorema 3 menyatakan bahwa graph wheel W_n bukan graph kombinasi untuk semua $n \leq 6$, sehingga untuk mendukung Teorema 3 akan ditunjukkan bahwa W_4 bukan merupakan graph kombinasi.

Bukti:

$n = 4$

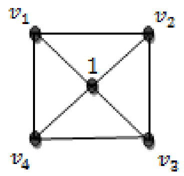
Dinotasikan sikel dengan pangjang 4 dari W_4 dengan C_4.
Misal x adalah titik yang tidak berada di C_4 yang adjacent ke setiap titik C_4.
Dinotasikan titik – titik C_4 dengan v_1, v_2, v_3, v_4 dimana v_1 adjacent ke v_4 dan v_i adjacent ke v_{i+1} , untuk $1 \leq i \leq 3$.



Gambar 3.27 Graph W_4

Didefinisikan pelabelan fungsi
$f : \boldsymbol{V(W_4)} \longrightarrow \{1,2,3,4,5\}$
Sehingga pelabelan titik-titik yang mungkin pada graph W_4, yaitu:

- Jika $f(x) = 1$

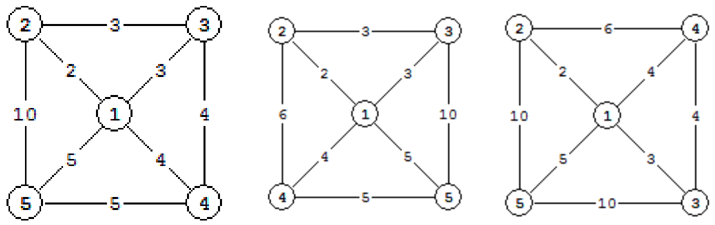


Gambar 3.28 Graph W_4 dengan $f(x) = 1$

Sehingga f bijektif.
Perhatikan bahwa:

$$\binom{k}{1} = \frac{k!}{1!\ (k-1)!} = \frac{k(k-1)!}{1!\ (k-1)!} = \binom{k}{k-1}$$

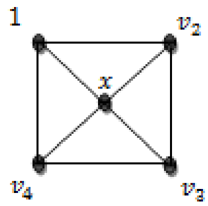
Jika $f(x) = 1$, maka ada (paling tidak) satu pasang label yang sama.
Untuk mendukung pernyataan di atas, perhatikan bahwa pelabelan titik-titik yang mungkin pada W_4 jika $f(x) = 1$ adalah:



Gambar 3.29 Graph W_4 setelah pelabelan f dengan $f(x) = 1$

Sehingga g_f tidak injektif dan pelabelan g_f bukan pelabelan kombinasi untuk $f(x) = 1$.

- Jika $2 \leq f(x) \leq 5$ dan $f(v_i) = 1$ ada pada sikel C_4



Gambar 3.30 Graph W_4 dengan $f(v_i) = 1$ pada C_4

Misal $f(x) = k$, dengan $k \in \mathbb{Z}$.
Karena $f(x) = k$ dan $f(v_i) = 1$ ada pada sikel C_4, maka $f(v_i) = k - 1$ ada pada sikel C_4 untuk $3 \leq f(x) \leq 5$.
Sehingga akan ada label $\binom{k}{1}$ dan label $\binom{k}{k-1}$ pada W_4.
Karena $g_f(k, 1) = \binom{k}{1} = \binom{k}{k-1} = g_f(k, k-1)$, maka g_f tidak injektif.
Sehingga pelabelan g_f bukan pelabelan kombinasi untuk $3 \leq f(x) \leq 5$.
Karena $f(x) = k$ dan $f(v_i) = 1$ ada pada sikel C_4, maka $f(v_i) = k + 1$ ada pada sikel C_4 untuk $f(x) = 2$.
Sehingga akan ada label $\binom{k+1}{1}$ dan label $\binom{k+1}{k}$ pada W_4.
Perhatikan bahwa:

$$\binom{k+1}{1} = \frac{(k+1)k!}{1!\,(k+1-1)!} = \frac{(k+1)k!}{1!\,k!} = \binom{k+1}{k}$$

Karena $g_f(k+1,1) = \binom{k+1}{1} = \binom{k+1}{k} = g_f(k+1, k)$, maka g_f tidak injektif Sehingga pelabelan g_f bukan pelabelan kombinasi untuk $f(x) = 2$.
Jadi W_4 bukan graph kombinasi.

Berikut akan diberikan lemma-lemma yang mendukung pembuktian Teorema 4.

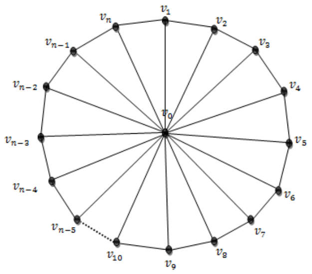
Lemma 1. (Li, 2012)
Jika $n \geq 7$ adalah bilangan ganjil, maka $\binom{n-1}{\lfloor n/2 \rfloor} < \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor - 1}$

Lemma 2. (Li, 2012)
Jika $n \geq 6$ adalah bilangan genap, maka $\binom{n}{n/2} < \binom{n+1}{(n-2)/2}$

Lemma 3. (Li, 2012)
Jika $n \geq 20$ adalah bilangan genap, maka $\binom{(n+4)/2}{2} < \binom{n+1}{2} < \binom{(n+4)/2}{3}$. Sebagai tambahan, jika $10 \leq n \leq 18$ adalah bilangan genap, maka $\binom{(n+4)/2}{3} < \binom{n+1}{2} < \binom{(n+6)/2}{3}$

Teorema 4. (Li, 2012)
Jika $n \geq 7$, maka $\boldsymbol{W_n}$ merupakan graph kombinasi

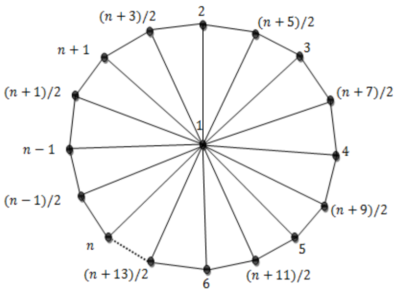
Bukti:
Misal $n \geq 7$.
Dinotasikan sikel dengan pangjang n dari W_n dengan C_n.
Misal x adalah titik yang tidak berada di C_n yang adjacent ke setiap titik C_n.
Dinotasikan titik – titik C_n dengan $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$ dimana v_1 adjacent ke v_n dan v_i adjacent ke v_{i+1} , untuk $1 \leq i \leq n-1$.



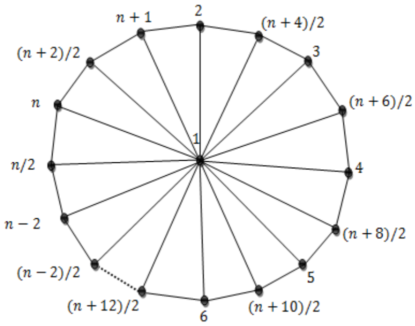
Gambar 3.24 Graph W_n

Pemberian label titik – titik pada W_n didefinisikan sebagai berikut.

1. Label 1 pada titik v_0.
2. Pada sikel C_n label $i+1$ pada v_i, untuk $1 \leq i \leq n-1$ dan label $n+1$ pada v_n.
3. Setelah melabeli titik v_i dengan k, lewati pelabelan pada titik v_{i+1} dan labeli titik v_{i+2} dengan $k+1$ jika titik v_{i+2} belum terlabeli. Jika titik v_{i+2} telah terlabeli, maka labeli titik v_{i+3} dengan $k+1$. Notasikan pelabelan titik pada W_n ini sebagai pelabelan f.
4. Jika n ganjil, tukar label n dengan $n-1$ pada pelabelan f.
   Jika n genap, tukar label $n-1$ dengan $n-2$ pada pelabelan f.



Gambar 3.25 Graph W_n (dimana n ganjil) setelah pelabelan f



Gambar 3.26 Graph W_n (dimana n genap) setelah pelabelan f

Sehingga sebagai alternatif pendefinisian pelabelan f pada graph W_n di atas, maka didefinisikan pelabelan fungsi

$f : \boldsymbol{V(W_n)} \longrightarrow \{1,2,3,4,\ldots,n+1\}$ sebagai berikut:

Jika n ganjil:

$f(v_0) = 1$

$f(v_{2i+1}) = i+2, \quad i = 0,1,2,\ldots,(n-1)/2$

$f(v_{2i}) = \frac{n+3}{2} + i, \quad i = 1,2,3,\ldots,(n-1)/2$ dan $v_{2i} \neq v_{n-5} \neq v_{n-3}$

$f(v_{n-5}) = n$

$f(v_{n-3}) = n-1$

Jika n genap:
$f(v_0) = 1$
$f(v_{2i+1}) = i + 2, \quad i = 0,1,2, \dots, (n-2)/2$
$f(v_{2i}) = \frac{n+2}{2} + i, \quad i = 1,2,3, \dots, n/2$ dan $v_{2i} \neq v_{n-6} \neq v_{n-4}$
$f(v_{n-6}) = n - 1$
$f(v_{n-4}) = n - 2$

Perhatikan bahwa:
Jika n ganjil
$g_f(1,2) = {}^{f(v_1)}C_{f(v_0)} = {}^{2}C_1 = 2$
$g_f\left(1, \frac{n+5}{2}\right) = {}^{f(v_2)}C_{f(v_0)} = {}^{(n+5)/2}C_1 = (n+5)/2$
$g_f(1,3) = {}^{f(v_3)}C_{f(v_0)} = {}^{3}C_1 = 3$
$g_f\left(1, \frac{n+7}{2}\right) = {}^{f(v_4)}C_{f(v_0)} = {}^{(n+7)/2}C_1 = (n+7)/2$
$g_f(1,4) = {}^{f(v_5)}C_{f(v_0)} = {}^{4}C_1 = 4$
$g_f\left(1, \frac{n+9}{2}\right) = {}^{f(v_6)}C_{f(v_0)} = {}^{(n+9)/2}C_1 = (n+9)/2$
$g_f(1,5) = {}^{f(v_7)}C_{f(v_0)} = {}^{5}C_1 = 5$
$g_f\left(1, \frac{n+11}{2}\right) = {}^{f(v_8)}C_{f(v_0)} = {}^{(n+11)/2}C_1 = (n+11)/2$
$g_f(1,6) = {}^{f(v_9)}C_{f(v_0)} = {}^{6}C_1 = 6$
$g_f\left(1, \frac{n+13}{2}\right) = {}^{f(v_{10})}C_{f(v_0)} = {}^{(n+13)/2}C_1 = (n+13)/2$
$\vdots$
$g_f(1, n-2) = {}^{f(v_{n-7})}C_{f(v_0)} = {}^{n-2}C_1 = n - 2$
$g_f(1, n) = {}^{f(v_{n-5})}C_{f(v_0)} = {}^{n}C_1 = n$
$g_f\left(1, \frac{n-1}{2}\right) = {}^{f(v_{n-4})}C_{f(v_0)} = {}^{(n-1)/2}C_1 = (n-1)/2$
$g_f(1, n-1) = {}^{f(v_{n-3})}C_{f(v_0)} = {}^{n-1}C_1 = n - 1$
$g_f\left(1, \frac{n+1}{2}\right) = {}^{f(v_{n-2})}C_{f(v_0)} = {}^{(n+1)/2}C_1 = (n+1)/2$
$g_f(1, n+1) = {}^{f(v_{n-1})}C_{f(v_0)} = {}^{n+1}C_1 = n + 1$
$g_f\left(1, \frac{n+3}{2}\right) = {}^{f(v_n)}C_{f(v_0)} = {}^{(n+3)/2}C_1 = (n+3)/2$
$g_f\left(2, \frac{n+5}{2}\right) = {}^{f(v_2)}C_{f(v_1)} = {}^{(n+5)/2}C_2 = \binom{\lceil n/2 \rceil + 2}{2} = \frac{(n+5)(n+3)}{2^2.2!}$
$g_f\left(\frac{n+5}{2}, 3\right) = {}^{f(v_2)}C_{f(v_3)} = {}^{(n+5)/2}C_3 = \binom{\lceil n/2 \rceil + 2}{3} = \frac{(n+5)(n+3)(n+1)}{2^3.3!}$
$g_f\left(3, \frac{n+7}{2}\right) = {}^{f(v_4)}C_{f(v_3)} = {}^{(n+7)/2}C_3 = \binom{\lceil n/2 \rceil + 3}{3} = \frac{(n+7)(n+5)(n+3)}{2^3.3!}$
$g_f\left(\frac{n+7}{2}, 4\right) = {}^{f(v_4)}C_{f(v_5)} = {}^{(n+7)/2}C_4 = \binom{\lceil n/2 \rceil + 3}{4} = \frac{(n+7)(n+5)(n+3)(n+1)}{2^4.4!}$
$g_f\left(4, \frac{n+9}{2}\right) = {}^{f(v_6)}C_{f(v_5)} = {}^{(n+9)/2}C_4 = \binom{\lceil n/2 \rceil + 4}{4} = \frac{(n+9)(n+7)(n+5)(n+3)}{2^4.4!}$
$\vdots$

$g_f\left(\frac{n-3}{2}, n\right) = {}^{f(v_{n-5})}C_{f(v_{n-4})} = {}^{n}C_{(n-3)/2} = \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor - 1}$
$g_f\left(n, \frac{n-1}{2}\right) = {}^{f(v_{n-5})}C_{f(v_{n-4})} = {}^{n}C_{(n-1)/2} = \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$
$g_f\left(\frac{n-1}{2}, n-1\right) = {}^{f(v_{n-3})}C_{f(v_{n-4})} = {}^{n-1}C_{(n-1)/2} = \binom{n-1}{\lfloor n/2 \rfloor}$
$g_f\left(n-1, \frac{n+1}{2}\right) = {}^{f(v_{n-3})}C_{f(v_{n-2})} = {}^{n-1}C_{(n+1)/2} = \binom{n-1}{\lceil n/2 \rceil} = \binom{n-1}{\lfloor n/2 \rfloor + 1}$
$g_f\left(\frac{n+1}{2}, n+1\right) = {}^{f(v_{n-1})}C_{f(v_{n-2})} = {}^{n+1}C_{(n+1)/2} = \binom{n+1}{\lceil n/2 \rceil}$
$g_f\left(n+1, \frac{n+3}{2}\right) = {}^{f(v_{n-1})}C_{f(v_{n})} = {}^{n+1}C_{(n+3)/2} = \binom{n+1}{\lceil n/2 \rceil + 1}$
$g_f\left(\frac{n+3}{2}, 2\right) = {}^{f(v_{n})}C_{f(v_{1})} = {}^{(n+3)/2}C_{2} = \binom{\lceil n/2 \rceil + 1}{2} = \frac{(n+1)(n+3)}{2^2.2!}$

Dari Lemma 1, maka didapat
$2 < 3 < 4 < 5 < \cdots < \frac{n-1}{2} < \frac{n+1}{2} < \frac{n+3}{2} < \frac{n+5}{2} < \cdots < n-1 < n < n+1 < \binom{\lceil n/2 \rceil + 1}{2} < \binom{\lceil n/2 \rceil + 2}{2} < \binom{\lceil n/2 \rceil + 2}{3} < \binom{\lceil n/2 \rceil + 3}{3} < \binom{\lceil n/2 \rceil + 3}{4} < \cdots < \binom{n-1}{\lfloor n/2 \rfloor + 1} < \binom{n-1}{\lfloor n/2 \rfloor} < \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor - 1} < \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} < \binom{n+1}{\lceil n/2 \rceil} < \binom{n+1}{\lceil n/2 \rceil + 1}$

Karena nilai sisi pada graph W_n untuk $n \geq 7$ dengan n ganjil, merupakan himpunan pasangan berbeda, sehingga pelabelan g_f pada setiap sisi graph W_n untuk $n \geq 7$ dengan n ganjil, adalah pelabelan kombinasi.

Jika n genap

$g_f(1,2) = {}^{f(v_1)}C_{f(v_0)} = {}^{2}C_{1} = 2$
$g_f\left(1, \frac{n+4}{2}\right) = {}^{f(v_2)}C_{f(v_0)} = {}^{(n+4)/2}C_{1} = (n+4)/2$
$g_f(1,3) = {}^{f(v_3)}C_{f(v_0)} = {}^{3}C_{1} = 3$
$g_f\left(1, \frac{n+6}{2}\right) = {}^{f(v_4)}C_{f(v_0)} = {}^{(n+6)/2}C_{1} = (n+6)/2$
$g_f(1,4) = {}^{f(v_5)}C_{f(v_0)} = {}^{4}C_{1} = 4$
$g_f\left(1, \frac{n+8}{2}\right) = {}^{f(v_6)}C_{f(v_0)} = {}^{(n+8)/2}C_{1} = (n+8)/2$
$g_f(1,5) = {}^{f(v_7)}C_{f(v_0)} = {}^{5}C_{1} = 5$
$g_f\left(1, \frac{n+10}{2}\right) = {}^{f(v_8)}C_{f(v_0)} = {}^{(n+10)/2}C_{1} = (n+10)/2$
$g_f(1,6) = {}^{f(v_9)}C_{f(v_0)} = {}^{6}C_{1} = 6$
$g_f\left(1, \frac{n+12}{2}\right) = {}^{f(v_{10})}C_{f(v_0)} = {}^{(n+12)/2}C_{1} = (n+12)/2$
$\vdots$
$g_f\left(1, \frac{n-2}{2}\right) = {}^{f(v_{n-5})}C_{f(v_0)} = {}^{(n-2)/2}C_{1} = (n-2)/2$
$g_f(1, n-2) = {}^{f(v_{n-4})}C_{f(v_0)} = {}^{n-2}C_{1} = n-2$
$g_f\left(1, \frac{n}{2}\right) = {}^{f(v_{n-3})}C_{f(v_0)} = {}^{n/2}C_{1} = n/2$

$g_f(1,n) = {}^{f(v_{n-2})}C_{f(v_0)} = {}^{n}C_1 = n$
$g_f\left(1,\frac{n+2}{2}\right) = {}^{f(v_{n-1})}C_{f(v_0)} = {}^{(n+2)/2}C_1 = (n+2)/2$
$g_f(1,n+1) = {}^{f(v_n)}C_{f(v_0)} = {}^{n+1}C_1 = n+1$
$g_f\left(2,\frac{n+4}{2}\right) = {}^{f(v_2)}C_{f(v_1)} = {}^{(n+4)/2}C_2 = \binom{(n/2)+2}{2} = \frac{(n+2)(n+4)}{2^2.2!}$
$g_f\left(\frac{n+4}{2},3\right) = {}^{f(v_2)}C_{f(v_3)} = {}^{(n+4)/2}C_3 = \binom{(n/2)+2}{3} = \frac{(n)(n+2)(n+4)}{2^3.3!}$
$g_f\left(3,\frac{n+6}{2}\right) = {}^{f(v_4)}C_{f(v_3)} = {}^{(n+6)/2}C_3 = \binom{(n/2)+3}{3} = \frac{(n+2)(n+4)(n+6)}{2^3.3!}$
$g_f\left(\frac{n+6}{2},4\right) = {}^{f(v_4)}C_{f(v_5)} = {}^{(n+6)/2}C_4 = \binom{(n/2)+3}{4} = \frac{(n)(n+2)(n+4)(n+6)}{2^4.4!}$
$g_f\left(4,\frac{n+8}{2}\right) = {}^{f(v_6)}C_{f(v_5)} = {}^{(n+8)/2}C_4 = \binom{(n/2)+4}{4} = \frac{(n+2)(n+4)(n+6)(n+8)}{2^4.4!}$
$\vdots$
$g_f\left(n-1,\frac{n-2}{2}\right) = {}^{f(v_{n-6})}C_{f(v_{n-5})} = {}^{n-1}C_{(n-2)/2} = \binom{n-1}{(n/2)-1}$
$g_f\left(\frac{n-2}{2},n-2\right) = {}^{f(v_{n-4})}C_{f(v_{n-5})} = {}^{n-2}C_{(n-2)/2} = \binom{n-2}{(n/2)-1}$
$g_f\left(n-2,\frac{n}{2}\right) = {}^{f(v_{n-4})}C_{f(v_{n-3})} = {}^{n-2}C_{n/2} = \binom{n-2}{(n/2)}$
$g_f\left(\frac{n}{2},n\right) = {}^{f(v_{n-2})}C_{f(v_{n-3})} = {}^{n}C_{n/2} = \binom{n}{(n/2)}$
$g_f\left(n,\frac{n+2}{2}\right) = {}^{f(v_{n-2})}C_{f(v_{n-1})} = {}^{n}C_{(n+2)/2} = \binom{n}{(n/2)+1} = \binom{n}{(n/2)-1}$
$g_f\left(\frac{n+2}{2},n+1\right) = {}^{f(v_n)}C_{f(v_{n-1})} = {}^{n+1}C_{(n+2)/2} = \binom{n+1}{(n/2)+1} = \binom{n+1}{(n/2)}$
$g_f(n+1,2) = {}^{f(v_n)}C_{f(v_1)} = {}^{n+1}C_2 = \binom{n+1}{2} = (n+1)n/2$

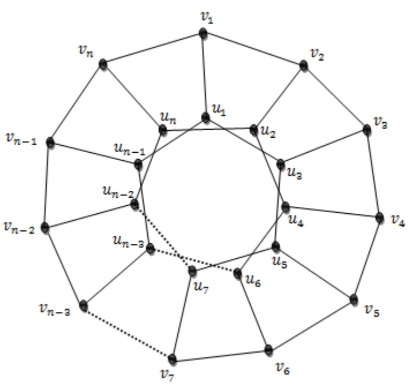
Dari Lemma 2 dan Lemma 3, maka didapat
$2 < 3 < 4 < 5 < \cdots < \frac{n}{2} < \frac{n+2}{2} < \frac{n+4}{2} < \frac{n+6}{2} < \cdots < n-1 < n < n+1 <$
$\binom{(n/2)+2}{2} < \binom{(n/2)+2}{3} < \binom{(n/2)+3}{3} < \binom{(n/2)+3}{4} < \binom{(n/2)+4}{4} <$
$\cdots < \binom{n-2}{(n/2)} < \binom{n-2}{(n/2)-1} < \binom{n-1}{(n/2)-2} < \binom{n-1}{(n/2)-1} < \binom{n}{(n/2)-1} <$
$\binom{n}{(n/2)} < \binom{n+1}{(n/2)+1}$
Karena nilai sisi pada graph W_n untuk $n \geq 7$ dengan n genap, merupakan himpunan pasangan berbeda, sehingga pelabelan g_f pada setiap sisi graph W_n untuk $n \geq 7$ dengan n genap, adalah pelabelan kombinasi.
Karena pelabelan g_f pada setiap sisi graph W_n untuk $n \geq 7$ adalah pelabelan kombinasi, jadi jika $n \geq 7$, maka Graph wheel W_n merupakan graph kombinasi.

Untuk mendeskripsikan syarat cukup graph kombinasi pada graph generalized petersen $(GP(n,2))$ dan pendefinisian pelabelan titik-titik pada graph generalized petersen $(GP(n,2))$ agar menjadi pelabelan kombinasi sehingga graph generalized petersen $(GP(n,2))$ merupakan graph kombinasi, berikut ini akan dibahas suatu teorema tentang graph kombinasi pada graph generalized petersen ($GP(n,2)$) serta pembuktiannya kemudian analisa pelabelan titik-titik pada graph generalized petersen ($GP(n,2)$) agar menjadi pelabelan kombinasi sehingga graph generalized petersen ($GP(n,2)$) merupakan graph kombinasi. Pembuktian Teorema 5 diadaptasi dari jurnal Li (2012). Pembuktian teorema pada jurnal Li (2012) untuk $5 \le n \le 8$ menunjukkan keberadaannya dengan gambar dan untuk $n \ge 9$ berupa analisa pembuktian. Setelah dianalisa ternyata pelabelan titik pada pembuktian untuk $n \ge 9$ tidak berlaku untuk $n < 9$ dengan n genap namun berlaku untuk n ganjil, maka dilakukan modifikasi pelabelan titik yang berlaku untuk semua $n \ge 5$ untuk n genap, sedangkan untuk n ganjil pendefinisian pelabelan titik sama seperti yang tertera pada jurnal Li (2012).

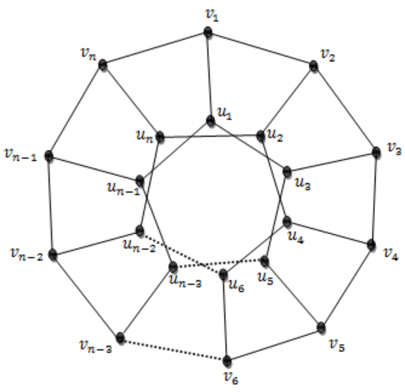
Andaikan k, n bilangan bulat positif sedemikian hingga $n > 2k$. Jika $GP(n,k)$ dengan $k = 2$, maka $n > 4$ dan dinotasikan dengan $GP(n,2)$. Karena pada artikel ini hanya membahas graph $GP(n,2)$, maka pada artikel ini tidak akan membahas $GP(n,2)$ dengan $n < 5$ karena memang tidak ada.

Teorema 5. (Li, 2012)
Jika $n \ge 5$, maka $\boldsymbol{GP(n,2)}$ merupakan graph kombinasi

Bukti:
Misal $n \ge 5$.
Dinotasikan titik – titik dari $GP(n,2)$ sebagai $u_1, u_2, u_3, ..., u_n, v_1, v_2, v_3, ..., v_n$ secara berurutan, sedemikian sehingga v_1 adjacent ke v_n, v_i adjacent ke v_{i+1} , untuk $1 \le i \le n-1$, v_i adjacent ke u_i.
Untuk n ganjil, u_1 adjacent ke u_{n-1}, u_2 adjacent ke u_n, u_{2i+1} adjacent ke u_{2i+3}, untuk $0 \le i \le (n-4)/2$, dan u_{2i} adjacent ke u_{2i+2}, untuk $1 \le i \le (n-2)/2$.
Untuk n genap, u_1 adjacent ke u_{n-1}, u_2 adjacent ke u_n, u_{2i+1} adjacent ke u_{2i+3}, untuk $0 \le i \le (n-3)/2$, dan u_{2i} adjacent ke u_{2i+2}, untuk $1 \le i \le (n-3)/2$.



Gambar 3.46 Graph $\boldsymbol{GP(n,2)}$ dengan $\boldsymbol{n}$ ganjil



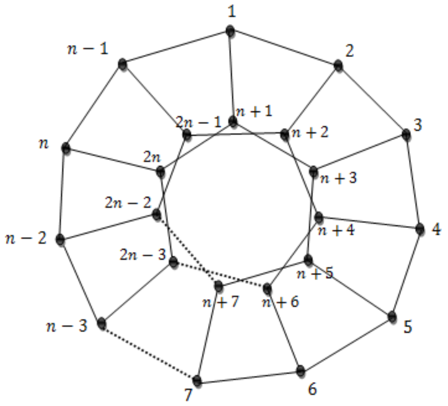
Gambar 3.47 Graph $\boldsymbol{GP(n,2)}$ dengan $\boldsymbol{n}$ genap

Didefinisikan pelabelan fungsi
$f : \boldsymbol{V(GP(n,2))} \longrightarrow \{1,2,3,...,2n\}$ sebagai berikut:

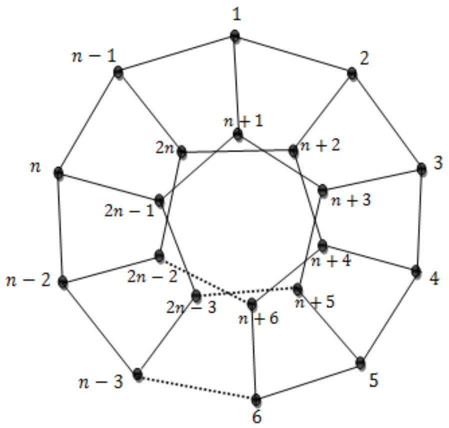
Jika $\boldsymbol{n}$ ganjil
$f(v_i) = i,\ i = 1,2,3,...,n-2$
$f(v_{n-1}) = n$
$f(v_n) = n-1$
$f(u_i) = n+i,\ i = 1,2,3,...,n-2$

$f(u_{n-1}) = 2n$
$f(u_n) = 2n - 1$

Jika n genap
$f(v_i) = i,\ i = 1,2,3,\dots,n-2$
$f(v_{n-1}) = n$
$f(v_n) = n - 1$
$f(u_i) = n + i,\ i = 1,2,3,\dots,n$



Gambar 3.48 Graph $\boldsymbol{GP(n,2)}$ dengan $\boldsymbol{n}$ ganjil setelah pelabelan f



Gambar 3.49 Graph $\boldsymbol{GP(n,2)}$ dengan $\boldsymbol{n}$ genap setelah pelabelan f

Sehingga f bijektif.

Perhatikan bahwa:
Jika n ganjil
$g_f(1,2) = {}^{f(v_2)}C_{f(v_1)} = {}^{2}C_1 = 2$
$g_f(2,3) = {}^{f(v_3)}C_{f(v_2)} = {}^{3}C_2 = 3$
$g_f(3,4) = {}^{f(v_4)}C_{f(v_3)} = {}^{4}C_3 = 4$
$g_f(4,5) = {}^{f(v_5)}C_{f(v_4)} = {}^{5}C_4 = 5$
$\vdots$
$g_f(n-3,n-2) = {}^{f(v_{n-2})}C_{f(v_{n-3})} = {}^{n-2}C_{n-3} = n-2$
$g_f(n-2,n) = {}^{f(v_{n-1})}C_{f(v_{n-2})} = {}^{n}C_{n-2} = n(n-1)/2$

$g_f(n, n-1) = {}^{f(v_{n-1})}C_{f(v_n)} = {}^{n}C_{n-1} = n$

$g_f(n-1, 1) = {}^{f(v_n)}C_{f(v_1)} = {}^{n-1}C_1 = n-1$

$g_f(1, n+1) = {}^{f(u_1)}C_{f(v_1)} = {}^{n+1}C_1 = n+1$

$g_f(2, n+2) = {}^{f(u_2)}C_{f(v_2)} = {}^{n+2}C_2 = \binom{n+2}{2} = (n+2)(n+1)/2!$

$g_f(3, n+3) = {}^{f(u_3)}C_{f(v_3)} = {}^{n+3}C_3 = \binom{n+3}{3} = (n+3)(n+2)(n+1)/3!$

$g_f(4, n+4) = {}^{f(u_4)}C_{f(v_4)} = {}^{n+4}C_4 = \binom{n+4}{4} = \frac{(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)}{4!}$

$\vdots$

$g_f(n-3, 2n-3) = {}^{f(u_{n-3})}C_{f(v_{n-3})} = {}^{2n-3}C_{n-3} = \binom{2n-3}{n-3} = \frac{(2n-3)\ldots(n+1)}{(n-3)!}$

$g_f(n-2, 2n-2) = {}^{f(u_{n-2})}C_{f(v_{n-2})} = {}^{2n-2}C_{n-2} = \binom{2n-2}{n-2} = \frac{(2n-2)\ldots(n+1)}{(n-2)!}$

$g_f(n-1, 2n-1) = {}^{f(u_n)}C_{f(v_n)} = {}^{2n-1}C_{n-1} = \binom{2n-1}{n-1} = \frac{(2n-1)\ldots(n+1)}{(n-1)!}$

$g_f(n, 2n) = {}^{f(u_{n-1})}C_{f(v_{n-1})} = {}^{2n}C_n = \binom{2n}{n} = 2n \ldots (n+1)/n!$

$g_f(n+1, n+3) = {}^{f(u_3)}C_{f(u_1)} = {}^{n+3}C_{n+1} = \binom{n+3}{n+1} = (n+3)(n+2)/2!$

$g_f(n+3, n+5) = {}^{f(u_5)}C_{f(u_3)} = {}^{n+5}C_{n+3} = \binom{n+5}{n+3} = (n+5)(n+4)/2!$

$g_f(n+5, n+7) = {}^{f(u_7)}C_{f(u_5)} = {}^{n+7}C_{n+5} = \binom{n+7}{n+5} = (n+7)(n+6)/2!$

$\vdots$

$g_f(2n-2, 2n-1) = {}^{f(u_n)}C_{f(u_{n-2})} = {}^{2n-1}C_{2n-2} = \binom{2n-1}{2n-2} = 2n-1$

$g_f(2n-1, n+2) = {}^{f(u_n)}C_{f(u_2)} = {}^{2n-1}C_{n+2} = \binom{2n-1}{n+2} = \binom{2n-1}{n-3}$

$g_f(n+2, n+4) = {}^{f(u_4)}C_{f(u_2)} = {}^{n+4}C_{n+2} = \binom{n+4}{n+2} = (n+4)(n+3)/2!$

$g_f(n+4, n+6) = {}^{f(u_6)}C_{f(u_4)} = {}^{n+6}C_{n+4} = \binom{n+6}{n+4} = (n+6)(n+5)/2!$

$\vdots$

$g_f(2n-5, 2n-3) = {}^{f(u_{n-3})}C_{f(u_{n-5})} = {}^{2n-3}C_{2n-5} = \binom{2n-3}{2n-5} = \frac{(2n-3)(2n-4)}{2!}$

$g_f(2n-3, 2n) = {}^{f(u_{n-1})}C_{f(u_{n-3})} = {}^{2n}C_{2n-3} = \binom{2n}{2n-3} = 2n(2n-1)(2n-2)/3!$

$g_f(2n, n+1) = {}^{f(u_{n-1})}C_{f(u_1)} = {}^{2n}C_{n+1} = \binom{2n}{n-1}$

Dari perhitungan di atas, maka untuk $n \geq 5$ didapat

$2 < 3 < 4 < \cdots < n-1 < n < n+1 < 2n-1 < \frac{n(n-1)}{2} < \frac{(n+1)(n+2)}{2!} < \frac{(n+2)(n+3)}{2!} < \frac{(n+3)(n+4)}{2!} < \frac{(n+4)(n+5)}{2!} < \cdots < \frac{(2n-4)(2n-3)}{2!} < \frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{3!} < \frac{2n(2n-1)(2n-2)}{3!} < \frac{(n+4)\ldots(n+1)}{4!} < \cdots < \binom{2n-1}{n-3} < \binom{2n}{n-1} < \frac{(2n-1)\ldots(n+1)}{(n-1)!} < \frac{(2n)\ldots(n+1)}{n!}$

Sehingga g_f injektif dan pelabelan g_f pada sisi – sisi graph $\boldsymbol{GP(n,2)}$ dengan $\boldsymbol{n}$ ganjil disebut pelabelan kombinasi.

Jika n genap

$g_f(1,2) = {}^{f(v_2)}C_{f(v_1)} = {}^{2}C_1 = 2$

$g_f(2,3) = {}^{f(v_3)}C_{f(v_2)} = {}^{3}C_2 = 3$

$g_f(3,4) = {}^{f(v_4)}C_{f(v_3)} = {}^{4}C_3 = 4$

$g_f(4,5) = {}^{f(v_5)}C_{f(v_4)} = {}^{5}C_4 = 5$

$\vdots$

$g_f(n-3, n-2) = {}^{f(v_{n-2})}C_{f(v_{n-3})} = {}^{n-2}C_{n-3} = n-2$

$g_f(n-2, n) = {}^{f(v_{n-1})}C_{f(v_{n-2})} = {}^{n}C_{n-2} = n(n-1)/2$

$g_f(n, n-1) = {}^{f(v_{n-1})}C_{f(v_n)} = {}^{n}C_{n-1} = n$

$g_f(n-1,1) = {}^{f(v_n)}C_{f(v_1)} = {}^{n-1}C_1 = n-1$

$g_f(1, n+1) = {}^{f(u_1)}C_{f(v_1)} = {}^{n+1}C_1 = n+1$

$g_f(2, n+2) = {}^{f(u_2)}C_{f(v_2)} = {}^{n+2}C_2 = \binom{n+2}{2} = (n+2)(n+1)/2!$

$g_f(3, n+3) = {}^{f(u_3)}C_{f(v_3)} = {}^{n+3}C_3 = \binom{n+3}{3} = (n+3)(n+2)(n+1)/3!$

$g_f(4, n+4) = {}^{f(u_4)}C_{f(v_4)} = {}^{n+4}C_4 = \binom{n+4}{2} = \frac{(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)}{4!}$

$\vdots$

$g_f(n-3, 2n-3) = {}^{f(u_{n-3})}C_{f(v_{n-3})} = {}^{2n-3}C_{n-3} = \binom{2n-3}{n-3} = \frac{(2n-3)\dots(n+1)}{(n-3)!}$

$g_f(n-2, 2n-2) = {}^{f(u_{n-2})}C_{f(v_{n-2})} = {}^{2n-2}C_{n-2} = \binom{2n-2}{n-2} = \frac{(2n-2)\dots(n+1)}{(n-2)!}$

$g_f(n-1, 2n) = {}^{f(u_n)}C_{f(v_n)} = {}^{2n}C_{n-1} = \binom{2n}{n-1} = 2n \dots (n+2)/(n-1)!$

$g_f(n, 2n-1) = {}^{f(u_{n-1})}C_{f(v_{n-1})} = {}^{2n-1}C_n = \binom{2n-1}{n} = \frac{(2n-1)\dots(n+1)}{(n-1)!}$

$g_f(n+1, n+3) = {}^{f(u_3)}C_{f(u_1)} = {}^{n+3}C_{n+1} = \binom{n+3}{n+1} = (n+3)(n+2)/2!$

$g_f(n+3, n+5) = {}^{f(u_5)}C_{f(u_3)} = {}^{n+5}C_{n+3} = \binom{n+5}{n+3} = (n+5)(n+4)/2!$

$g_f(n+5, n+7) = {}^{f(u_7)}C_{f(u_5)} = {}^{n+7}C_{n+5} = \binom{n+7}{n+5} = (n+7)(n+6)/2!$

$\vdots$

$g_f(2n-5, 2n-3) = {}^{f(u_{n-3})}C_{f(u_{n-5})} = {}^{2n-3}C_{2n-5} = \binom{2n-3}{2n-5} = \frac{(2n-3)(2n-4)}{2!}$

$g_f(2n-3, 2n-1) = {}^{f(u_{n-1})}C_{f(u_{n-3})} = {}^{2n-1}C_{2n-3} = \binom{2n-1}{2n-3} = \frac{(2n-1)(2n-2)}{2!}$

$g_f(2n-1, n+1) = {}^{f(u_{n-1})}C_{f(u_1)} = {}^{2n-1}C_{n+1} = \binom{2n-1}{n+1} = \frac{(2n-1)\dots(n+2)}{(n-2)!}$

$g_f(n+2, n+4) = {}^{f(u_4)}C_{f(u_2)} = {}^{n+4}C_{n+2} = \binom{n+4}{n+2} = (n+4)(n+3)/2!$

$g_f(n+4, n+6) = {}^{f(u_6)}C_{f(u_4)} = {}^{n+6}C_{n+4} = \binom{n+6}{n+4} = (n+6)(n+5)/2!$

$\vdots$

$g_f(2n-2, 2n) = {}^{f(u_n)}C_{f(u_{n-2})} = {}^{2n}C_{2n-2} = \binom{2n}{2n-2} = 2n(2n-1)/2!$

$$g_f(2n, n+2) = {}^{f(u_n)}C_{f(u_2)} = {}^{2n-1}C_{n+2} = \binom{2n-1}{n+2} = 2n \ldots (2n+3)/(n-2)!$$

Dari perhitungan di atas, maka untuk $n \geq 5$ didapat

$2 < 3 < 4 < \cdots < n-1 < n < n+1 < \frac{n(n-1)}{2} < \frac{(n+1)(n+2)}{2!} < \frac{(n+2)(n+3)}{2!} < \frac{(n+3)(n+4)}{2!} < \frac{(n+4)(n+5)}{2!} < \frac{(n+5)(n+6)}{2!} < \frac{(n+6)(n+7)}{2!} < \cdots < \frac{(2n-1)(2n-2)}{2!} < \frac{2n(2n-1)}{2!} < \frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{3!} < \frac{(n+4)\ldots(n+1)}{4!} < \cdots < \frac{(2n-2)\ldots(n+1)}{(n-2)!} < \frac{(2n-1)\ldots(n+2)}{(n-2)!} < \frac{(2n)\ldots(2n+3)}{(n-2)!} < \frac{(2n-1)\ldots(n+1)}{(n-1)!} < \frac{(2n)\ldots(n+2)}{(n-1)!}$

Sehingga g_f injektif dan pelabelan g_f pada sisi – sisi graph $\boldsymbol{GP(n,2)}$ dengan $\boldsymbol{n}$ genap disebut pelabelan kombinasi.

Sehingga graph $\boldsymbol{GP(n,2)}$ merupakan graph kombinasi untuk semua $n \geq 5$, baik $\boldsymbol{n}$ genap maupun ganjil.

Jadi jika $n \geq 5$, maka $\boldsymbol{GP(n,2)}$ merupakan graph kombinasi

PENUTUP

Dari pembahasan di atas, maka berikut akan dipaparkan beberapa hasil-hasil penting dari tulisan ini.

1. Syarat cukup graph kombinasi pada graph sikel (C_n) adalah jika $n > 3$ dan pelabelan titik-titik di C_n didefinisikan sebagai berikut: melabeli titik v_i dengan i untuk $1 \leq i \leq n-2$, titik v_{n-1} dengan n, titik v_n dengan $n-1$
2. Syarat cukup graph kombinasi pada graph wheel (W_n) adalah jika $n \geq 7$ dan pelabelan titik-titik di W_n didefinisikan sebagai berikut: $f(v_0) = 1$ dan pada sikel C_n setelah melabeli titik v_i dengan k dan lewati melabeli titik v_{i+1} dan labeli titik v_{i+2} dengan $k+1$ jika titik v_{i+2} belum terlabeli, jika telah terlabeli maka labeli titik v_{i+3} dengan $k+1$, tukar label sisi n dengan $n-1$ untuk n ganjil dan $n-1$ dengan $n-2$ untuk n genap
3. Syarat cukup graph kombinasi pada graph generalized petersen $(GP(n,2))$ adalah jika $n \geq 5$ dan pelabelan titik-titik di $GP(n,2)$ didefinisikan sebagai berikut: melabeli titik v_i dengan i untuk $1 \leq i \leq n-2$, titik v_{n-1} dengan n, titik v_n dengan $n-1$ dan melabeli titik u_i dengan $n+i$ untuk $1 \leq i \leq n-2$, titik u_{n-1} dengan $2n$, titik v_n dengan $2n-1$ untuk n ganjil, serta melabeli titik u_i dengan $n+i$ untuk $1 \leq i \leq n$ untuk n genap.

Karena artikel ini hanya mengkaji pelabelan kombinasi dari graph kombinasi pada graph sikel (C_n), graph wheel (W_n), dan graph generalized petersen $(GP(n,2))$, maka untuk penelitian selanjutnya dapat dilakukan pembuktikan bahwa untuk semua graph tree merupakan graph kombinasi.

DAFTAR RUJUKAN

Aldous, J.M & Wilson, R.J. 2004. *Graph and Applications An Introductory Approach*. Great Britain: Springer.

Chartrand, G., Erwin, D., Vanderjagt, D.W., and Zhang, P. 2005. On γ −Labelings Of Trees. *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, (Online), 25:363-3833, (http://www.discuss.wmie.vz.zgora.pl/gt/index.php?doi=10.7151/dmgt.1289), diakses 17 September 2013.

Gallian, J.A., 2011. A Dinamic Survey Of Graph Labeling. *The Electron Of Journal Combinatorics*, 18 (DS6), (Online), (http://cs.anu.edu.au/publications/eljc/Survey/ds6.pdf), diakses 15 Mei 2013.

Hedge, S.M.,2012. *Labeled Graphs and Digraphs: Theory and Applications*. Makalah disajikan pada Research Promotion Workshop on IGGA, India, 12 Januari 2012, (Online), (http://www.tcs.tifr.res.in/~workshop/nitk_igga/slides/iggaSHM.pdf), diakses 16 April 2014.

Hedge, Suresh Manjanath & Shetty, Sudhakar. 2006. Combinatorial Labelings Of Graphs. *Applied Mathematics E – Notes,* (Online), 6(2006): 251-258, (http://www.math.nthu.edu.tw), diakses 15 Mei 2013.

Li, Pak Ching. 2012. Combination Labelings Of Graphs. *Applied Mathematics E – Notes,* (Online), 12(2012): 158-168, (http://www.math.nthu.edu.tw), diakses 15 Mei 2013.

Moussa, M. Ibrahim. 2010. An Algorithm For Odd Graceful Labeling Of The Union Of Path and Cycles. *Journal on Applications Of Graph Theory in Wireless Ad-hoc Network and Sensor Network,* (Online), 2(1):112-120, (http://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1003/1003.3566.pdf), diakses 17 September 2013.

Wallis, W.D., Baskoro, Edy T., Miller, Mirka and Slamin. 2000. Edge-Magic Total Labeling. *Australasian Journal Of Combinatorics*, (Online), 22(1): 177-190, (http://ajc.math.uq.edu.au/pdf/22/ocr-ajc-v22-p177.pdf), diakses 17 September 2013.