

Pelabelan skolem graceful pada graf (S_n, r)

Angger Sedayu*

Prof. Drs. Purwanto, Ph.D**

FMIPA Universitas Negeri Malang

E-Mail: angger_sedayu02@yahoo.co.id

Abstrak: Pelabelan pada suatu graph adalah pemetaan yang memetakan unsur-unsur graph yaitu himpunan titik, himpunan sisi, maupun himpunan titik dan sisi ke suatu bilangan asli dengan aturan tertentu. Pelabelan *Skolem Graceful* adalah fungsi injektif γ dari himpunan titik V ke himpunan bilangan $\{1, 2, \dots, |V|\}$ yang menginduksi fungsi bijektif γ' dari himpunan sisi E ke himpunan $\{1, 2, \dots, |E|\}$ dimana setiap sisi $uv \in E$ dengan titik $u, v \in V$ berlaku $\gamma'(uv) = |\gamma(u) - \gamma(v)|$.

Pada skripsi ini ditunjukkan bahwa graf (S_n, r) mempunyai pelabelan skolem graceful untuk $2 \leq r \leq 5$. Pembuktian dilakukan dengan mengkontruksi himpunan pelabelan titik dan pelabelan sisinya. Graf (S_n, r) adalah suatu graf yang dibangun dari graf bintang S_n sebanyak r , kemudian diberikan sebuah titik pusat c yang dihubungkan ke setiap titik pusat S_n dengan menambahkan sisi.

Dari pembahasan diperoleh graf (S_n, r) untuk $2 \leq r \leq 5$ mempunyai pelabelan skolem graceful. Pelabelan Skolem Graceful pada graf (S_n, r) , $2 \leq r \leq 5$ dikerjakan dengan melabeli titik terlebih dahulu, dan dilanjutkan dengan melabeli sisi.

Lebih lanjut pembahasan ini dapat dibuat aplikasi khusus untuk memeriksa apakah suatu graf dapat dilabeli secara skolem graceful untuk graf (S_n, r) untuk r lebih tinggi.

Kata Kunci: Graf, Pelabelan, Pelabelan Skolem Graceful, Graf (S_n, r) .

Abstract: A labeling on a graph is a mapping that maps the elements of a graph that is either a set of vertices, a set of edges, or a set of vertices and edges to natural number with specific rule. The *Skolem Graceful* labeling is an injective function γ from a set of vertices V to a set of $\{1, 2, \dots, |V|\}$ that induces a bijective function γ' from a set of edges E to a set of $\{1, 2, \dots, |E|\}$ where each edge $uv \in E$ and vertex $u, v \in V$ obtain $\gamma'(uv) = |\gamma(u) - \gamma(v)|$.

In this minithesis it is showed that the graph (S_n, r) has a Skolem Graceful Labelling for $2 \leq r \leq 5$. The prove is done by labeling the set of that vertices and edges. The graph (S_n, r) is a graph that constructed from star graph S_n as much as r numbers, then it was given a central vertex c connected to each central vertex of S_n by adding edge.

The result of research that graph (S_n, r) for $2 \leq r \leq 5$ has a Skolem Graceful Labelling. The Skolem Graceful Labelling on the graph

**Angger Sedayu adalah Mahasiswa Program Study Matematika Universitas Negeri Malang **Prof. Drs. Purwanto, Ph.D adalah Dosen Universitas Negeri Malang*

$(S_n, r), 2 \leq r \leq 5$ is done by labeling the vertex first and followed by labeling the edge.

Further research of this can be made an application to check whether a graph can be labeled by skolem graceful for graph (S_n, r) with a high level of r .

Keyword: Graph, Labeling, Skolem Graceful Labelling, The Graph (S_n, r) .

Suatu graf $G = (V(G), E(G))$ terdiri atas suatu himpunan tak-kosong dan berhingga $V = V(G)$ yang anggotanya disebut titik, dan suatu himpunan berhingga $E = E(G)$ yang anggotanya disebut sisi, dimana busur tersebut merupakan pasangan tak terurut dari titik-titik yang berbeda pada $V(G)$. Banyak anggota pada himpunan titik V dinyatakan sebagai $|V|$. Banyaknya sisi pada suatu graf G dinyatakan sebagai $|E|$.

Pelabelan graf adalah salah satu cabang dari teori graf. Pelabelan f pada graf $G(V, E)$ adalah pemetaan dari himpunan titik V atau himpunan sisi E , atau gabungan keduanya $V \cup E$ ke suatu himpunan, biasanya himpunan bilangan asli dengan aturan tertentu. Nilai $f(x)$ disebut label dari titik atau sisi x .

Pelabelan graceful pertama kali ditemukan oleh Alex Rosa pada tahun 1967 berawal dari fungsi f yang merupakan penilaian β (β valuation) yaitu fungsi injektif f dari $V(G)$ ke himpunan $\{0, 1, 2, \dots, |E|\}$ yang menetapkan nilai sisi xy dengan $f(xy) = |f(x) - f(y)|, x, y \in V$ yang menghasilkan label-label berbeda pada sisi. Golomb kemudian mempopulerkan pelabelan tersebut dengan nama *Graceful* yang populer sampai sekarang. Pelabelan *graceful* pada graf $G(V, E)$ adalah fungsi injektif α dari himpunan titik V ke himpunan bilangan $\{0, 1, 2, \dots, |E|\}$ yang menginduksi fungsi α' dari himpunan sisi E ke himpunan bilangan $\{1, 2, \dots, |E|\}$ dimana setiap sisi $uv \in E$ dengan titik $u, v \in V$ berlaku $\alpha'(uv) = |\alpha(u) - \alpha(v)|$ (Choudum & Khishore, 1996).

Graf bintang adalah graf terhubung dengan sejumlah titik yang masing-masing hanya terhubung dengan satu titik tetap. Titik tetap ini disebut titik pusat. Graf bintang adalah graceful tetapi gabungan dua graf bintang bukan graceful karena banyak titik dua graf bintang lebih banyak dari sisinya (Choudum & Khishore, 1996). Bagaimana jika ada sebuah titik yang saling dihubungkan dengan titik pusat 2 graf bintang S_n tersebut, sehingga membentuk graf $(S_n, 2)$. Hal yang sama dilakukan terhadap 3, 4 dan 5 graf bintang S_n berturut-turut membentuk graf $(S_n, 3)$ (Zulfy dkk, 2011), graf $(S_n, 4)$ dan graf $(S_n, 5)$ sehingga diberikan suatu simpulan jika sebanyak r graf bintang S_n akan membentuk graf (S_n, r) untuk $r \geq 2$.

Terdapat beberapa variasi dari pelabelan *graceful* seperti pelabelan *skolem graceful* dan pelabelan \hat{p} . Pada skripsi ini, penulis melakukan kajian pelabelan *skolem graceful* pada graf $(S_n, r), 2 \leq r \leq 5$.

PEMBAHASAN

Pelabelan *Skolem Graceful* pada Graf $(S_n, 2)$

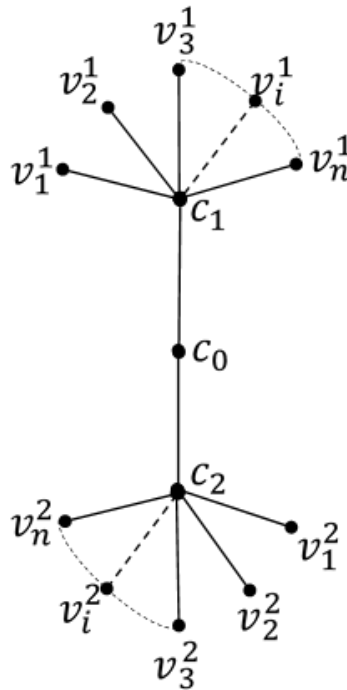
Misalkan diketahui dua graf yang masing-masing merupakan graf *graceful*, gabungan kedua graf tersebut belum tentu *graceful*. Sebagai contoh graf bintang S_n

adalah *graceful* tetapi gabungan dua graf bintang yaitu graf $2S_n$ bukan *graceful* karena banyak titik $2S_n$ lebih banyak dari sisinya (Choudum & Khishore, 1996). Bagaimana jika ada sebuah titik yang saling dihubungkan dengan titik pusat 2 graf bintang S_n tersebut, sehingga membentuk graf $(S_n, 2)$. Untuk graf yang memiliki banyak titik lebih dari sisinya, didefinisikan pelabelan sejenis yang memberikan kelonggaran pada pelabelan titiknya, yaitu pelabelan *Skolem Graceful*. Menurut Choudum dan Khisore, Lee dan Wui membuktikan bahwa gabungan 2 graf bintang memiliki pelabelan *Skolem Graceful* dengan ketentuan bahwa salah satunya adalah graf bintang dengan sisi genap. Perlu diingat bahwa pelabelan *Skolem Graceful* pada graf G adalah berupa fungsi injektif γ dari himpunan titik V ke himpunan bilangan $\{1, 2, \dots, |V|\}$ yang menginduksi fungsi bijektif γ' dari himpunan sisi E ke himpunan $\{1, 2, \dots, |E|\}$ dimana setiap sisi $uv \in E$ dengan titik $u, v \in V$ berlaku $\gamma'(uv) = |\gamma(u) - \gamma(v)|$.

Pada Teorema 3.1 diberikan bukti dari graf $(S_n, 2)$ dengan sisi genap mempunyai konstruksi pelabelan *Skolem Graceful*. Hal yang sama akan dilakukan terhadap 3, 4 dan 5 graf bintang S_n berturut-turut membentuk graf $(S_n, 3)$ (Zulfy dkk, 2011), graf $(S_n, 4)$ dan graf $(S_n, 5)$.

Teorema 3.1 Graf $(S_n, 2)$, n genap memiliki pelabelan *skolem graceful*.

Bukti. Misalkan notasi titik Graf $(S_n, 2)$ sebagai berikut:



Gambar 1 Graf $(S_n, 2)$

Pada Gambar 1 terlihat bahwa himpunan titik $V(S_n, 2) = \{c_0, c_1, c_2, v_1^1, v_2^1, \dots, v_n^1, v_1^2, v_2^2, \dots, v_n^2\}$ himpunan sisi $E(S_n, 2) = \{c_0c_1, c_0c_2, c_1v_1^1, c_1v_2^1, \dots, c_1v_n^1, c_2v_1^2, c_2v_2^2, \dots, c_2v_n^2\}$ sehingga banyaknya elemen V dan E masing-masing adalah $2n + 3$ dan $2n + 2$ dinotasikan dengan $|V| = 2n + 3$ dan $|E| =$

$2n + 2$. Didefinisikan pelabelan dengan menggunakan notasi γ , untuk titik sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \gamma: (V(S_n, 2)) &\rightarrow \{1, 2, 3, \dots, |V|\} \\ \gamma(c_0) &= n + 3 \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\gamma(c_1) = 1 \quad (2.2)$$

$$\gamma(c_2) = 2 \quad (2.3)$$

$$\gamma(v_i^1) = 2n + 4 - i \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (2.4)$$

$$\gamma(v_i^2) = n + 3 - i \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (2.5)$$

Setiap $uv \in E$ diberikan label dengan pelabelan sisi γ' yang diinduksi pelabelan titik dengan $\gamma'(uv) = |\gamma(u) - \gamma(v)|$, $uv \in E$ dan $u, v \in V$ pada graf $(S_n, 2)$ maka didapat:

$$\begin{aligned} \gamma'(c_0c_1) &= |\gamma(c_0) - \gamma(c_1)| \\ &= |(n + 3) - 1| \\ &= n + 2 \end{aligned} \quad (2.6)$$

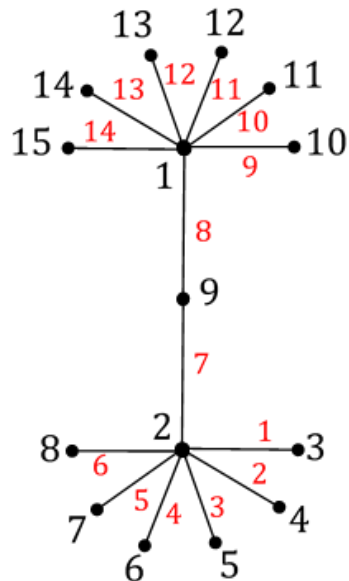
$$\begin{aligned} \gamma'(c_0c_2) &= |\gamma(c_0) - \gamma(c_2)| \\ &= |(n + 3) - 2| \\ &= n + 1 \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} \gamma'(c_1v_i^1) &= |\gamma(c_1) - \gamma(v_i^1)| \\ &= |1 - (2n + 4 - i)| \\ &= 2n + 3 - i \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} \gamma'(c_2v_i^2) &= |\gamma(c_2) - \gamma(v_i^2)| \\ &= |2 - (n + 3 - i)| \\ &= n + 1 - i \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \end{aligned} \quad (2.9)$$

Berdasarkan pelabelan γ pada (2.1)-(2.5), setiap titiknya memiliki label yang berbeda dan merupakan himpunan bilangan $\{1, 2, 3, \dots, |V|\}$. Kemudian pelabelan sisi γ' pada (2.6)-(2.9) yang diinduksi oleh pelabelan titik γ , memberikan nilai yang berbeda pada masing-masing sisi dan merupakan himpunan bilangan $\{1, 2, 3, \dots, |E|\}$. Jadi, graf $(S_n, 2)$ adalah *skolem graceful*.

Contoh:



Gambar 2 Pelabelan *Skolem Graceful* pada Graf $(S_6, 2)$

KESIMPULAN DAN SARAN

Kesimpulan

Dari pembahasan diperoleh graf (S_n, r) untuk $2 \leq r \leq 5$ mempunyai konstruksi pelabelan skolem graceful. Pelabelan Skolem Graceful pada graf (S_n, r) , $2 \leq r \leq 5$ dikerjakan dengan melabeli titik terlebih dahulu, dan dilanjutkan dengan melabeli sisi.

Saran

Pembahasan mengenai pelabelan skolem graceful pada graf (S_n, r) masih terbuka bagi peneliti untuk dilakukan penelitian lebih lanjut dengan $r > 5$. Lebih lanjut lagi penulisan ini dapat dilanjutkan dengan membuat aplikasi khusus untuk memeriksa apakah suatu graf dapat dilabeli secara skolem graceful untuk graf (S_n, r) untuk r lebih tinggi.

DAFTAR RUJUKAN

- Choudum, S. A., & Kishore, S. P. 1996. *All 5-star are Skolem graceful*. Indian J. Pure and Appl. Math, 27, 1101-1105, (online), (http://www.new1.dli.ernet.in/data1/upload/insa/INSA_2/20005a25_1101.pdf) diakses tanggal 13 september 2013.
- Gallian, J. A. 2013. *Dynamic Survey of Geaph Labeling*. Electronic Journal of Combinatorics 16 #DS.
- Sevenhot. 2010. *Pelabelan Skolem Graceful dan Pelabelan \hat{p} pada Gabungan Graf*. Skripsi. Depok: Universitas Indonesia.

Zulfy, A., Ahmad, M., Huda, N., Supriadi, & Sugeng, K. A. 2011. Pelabelan Skolem Graceful dan Pelabelan $\hat{\rho}$ pada Graf $(S_n, 3)$. Makalah disajikan dalam Prosiding Seminar Nasional Penelitian, Pendidikan dan Penerapan MIPA, Universitas Negeri Yogyakarta, Yogyakarta, 14 Mei.