Sifat-sifat semigrup hingga dan gabungannya

Vita Ayuningtias[1]
Santi Irawati[2]

Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Malang.
Email: tias_vita17@yahoo.com, santi.irawati.fmipa@um.ac.id

ABSTRAK: Semigrup adalah suatu himpunan tidak kosong S disertai dengan suatu operasi biner yang assosiatif. Jika banyaknya unsur-unsur di semigrup S adalah hingga maka S adalah semigrup hingga. Gabungan dari dua semigrup hingga ternyata tidak selalu merupakan semigrup. Minisker (2013) mendefinisikan suatu operasi biner pada gabungan dari dua semigrup hingga yang saling asing. Dari definisi ini, dapat ditunjukkan bahwa gabungan dari dua semigrup hingga tersebut merupakan semigrup juga. Artikel ini akan mengkaji sifat-sifat dari gabungan dua semigrup hingga yang saling asing, yaitu periodisitas dan residual hingga. Selain itu, artikel ini juga dilengkapi dengan definisi, lemma, teorema, dan proposisi pendukung. Beberapa contoh juga diberikan sebagai ilustrasi.

Kata Kunci: sifat-sifat semigrup hingga, gabungan dari dua semigrup hingga.

ABSTRACT: A semigroup is a nonempty set S with respect to an associative binary operation. If the number of elements in a semigroup S is finite then S is finite as well. The Union of two finite semigroups apparently is not always semigroup. Minisker (2013) defines a binary operation on union of two disjoint finite semigroups. From this definition, it can be shown that union of the two finite semigroups is also a semigroup. This article will describe some properties of the union of two disjoint finite semigroups, that is periodicity and residual finiteness. In addition, this article is also completed with the supporting definition, lemmas, theorems, and propositios. Some examples are also provided as illustrations.

Key Words: properties of finite semigroups, union of two finite semigroups.

Semigrup adalah suatu himpunan tidak kosong S disertai dengan suatu operasi biner yang assosiatif (Hungerford, 1974:24). Jika banyaknya unsur-unsur di semigrup S adalah hingga maka S adalah semigrup hingga. Teori semigrup dalam beberapa pengertian dimulai dengan suatu hasil dari semigrup hingga, seperti teorema Suschekewitsch yang mendeskripsikan struktur dari semigrup hingga tanpa ideal sejati (Almeida, 1994). Selain itu, sifat-sifat semigrup hingga juga telah diperhatikan untuk konstruksi golongan-golongan tertentu dari semigrup, seperti pada semigrup matriks Rees yang telah dibahas oleh Ayik (2005) dalam jurnal yang berjudul "*On Finiteness Conditions for Rees Matrix Semigroups*".

[1] Jurusan Matematika FMIPA UM
[2] Dosen Matematika FMIPA UM

Gabungan dari dua semigrup hingga belum tentu juga merupakan semigrup. Dalam artikel yang telah ditulis oleh Minisker (2013), didefinisikan operasi biner pada gabungan dari dua semigrup hingga yang saling asing. Dari definisi ini, dapat ditunjukkan bahwa gabungan dari dua semigrup hingga tersebut merupakan semigrup juga. Artikel ini akan membahas secara lebih rinci mengenai beberapa sifat dari semigrup hingga dan gabungannya. Selain itu, artikel ini juga dilengkapi dengan definisi, lemma, teorema, dan proposisi pendukung. Beberapa contoh juga diberikan sebagai ilustrasi.

PEMBAHASAN

Sifat-Sifat Semigrup Hingga

Berikut ini akan diberikan bukti dari teorema dan proposisi yang berkaitan dengan sifat-sifat semigrup hingga, serta beberapa contoh dari definisi diberikan sebagai ilustrasi.

Definisi 1 (Minisker, 2013)
Suatu semigrup S dikatakan **periodik** jika untuk sebarang $s \in S$, semigrup siklik yang dibangun oleh s adalah hingga, atau ekuivalen dengan ada bilangan bulat positif berbeda m, n (bergantung pada s) sedemikian hingga $s^m = s^n$.

Contoh 1
Semigrup $S = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{Z}_3 - \{\bar{0}\} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{2} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix} \right\}$
di bawah operasi perkalian adalah periodik.
Bukti:
Perhatikan bahwa

- $\begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix}^1 = \begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix}^2$
- $\begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix}^1 = \begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix}^2$
- $\begin{bmatrix} \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix}^1 = \begin{bmatrix} \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix}^3$
- $\begin{bmatrix} \bar{2} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix}^1 = \begin{bmatrix} \bar{2} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{2} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix}^3$

Ini berarti bahwa semigrup $S = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{Z}_3 - \{\bar{0}\} \right\}$ adalah periodik.

Setiap semigrup hingga adalah periodik, namun tidak semua semigrup periodik merupakan semigrup hingga. Berikut ini adalah contoh dari semigrup periodik yang tak hingga.

Contoh 2
Semigrup $(\mathbb{N}, *)$ yang didefinisikan dengan
$$x * y = \max\{x, y\},\ \ x, y \in \mathbb{N}$$
adalah semigrup periodik yang tak hingga.
Bukti:
Ambil sebarang $x \in \mathbb{N}$.
Perhatikan bahwa
$$x^s = x * x * \cdots * x = \max\{\underbrace{x, x, \dots, x}_{sebanyak\ s}\} = x = \max\{\underbrace{x, x, \dots, x}_{sebanyak\ t}\} = x^t$$
untuk sebarang s dan t.

Jadi, $(\mathbb{N},*)$ adalah semigrup periodik yang tak hingga.

Proposisi 1 (Howie, 1995:12)
Misalkan S adalah semigrup hingga. Maka untuk sebarang $x \in S$ ada $n \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga

$$x^n = x^n x^n$$

Bukti:
Karena S adalah semigrup hingga, maka S adalah periodik. Berarti bahwa untuk sebarang $x \in S$ ada bilangan bulat positif berbeda s, t sedemikian hingga $x^s = x^t$.
Misalkan $t > s$.
Misalkan $s = k$, $t = k + l$. Jadi berlaku $x^k = x^{k+l}$.
Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $x^{kl} = x^{kl}x^{kl}$.
Pertama perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} x^k &= x^{k+l} \\ x^k x^l &= x^{k+l}x^l \\ x^{k+l} &= x^{k+2l} \\ x^k &= x^{k+2l} \end{aligned}$$

Kemudian akan ditunjukkan bahwa $x^k = x^{k+rl}$ untuk sebarang $r \in \mathbb{N}$, yaitu sebagai berikut.

- Akan ditunjukkan benar untuk $r = 1$
  Perhatikan bahwa
  $$x^{k+1(l)} = x^{k+l} = x^k$$
  Jadi, benar untuk $r = 1$.
- Misalkan benar untuk $r = p$. Akan ditunjukkan benar untuk $r = p + 1$
  Perhatikan bahwa
  $$x^{k+\left((p+1)(l)\right)} = x^{k+pl+l} = x^{(k+pl)+l} = x^{k+pl}x^l = x^k x^l = x^{k+l} = x^k$$
  Jadi, benar untuk $r = p + 1$

Jadi, $x^k = x^{k+rl}$ untuk sebarang $r \in \mathbb{N}$.
Selanjutnya, untuk $r = k$, maka $x^k = x^{k+kl} = x^{k(1+l)}$
Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} x^k &= x^{k(1+l)} \\ x^k x^{k(l-1)} &= x^{k(1+l)}x^{k(l-1)} \\ x^{k+kl-k} &= x^{k+kl}x^{kl-k} \\ x^{kl} &= x^{k+kl+(kl-k)} \\ x^{kl} &= x^{kl+kl} \\ x^{kl} &= x^{kl}x^{kl} \end{aligned}$$

Misalkan $n = kl$, maka

$$x^n = x^n x^n$$

Jadi, untuk sebarang $x \in S$ ada $n \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga

$$x^n = x^n x^n$$

Proposisi 2 (Howie, 1995:12)
Jika S adalah semigrup hingga, maka ada unsur idempoten di S.
Bukti:
Berdasarkan Proposisi 1, untuk sebarang $x \in S$ ada $n \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga

$$x^n = x^n x^n.$$

Berarti ada $y \in S$ sedemikian hingga $y = x^n = x^n x^n$.

Sehingga

$$y = x^n = x^n x^n = y(y) = y^2$$

Jadi, ada unsur di S yang merupakan idempoten.

Definisi 2 (Minisker, 2013)

Suatu semigrup S dikatakan **hingga secara residual** jika untuk sebarang pasangan $s, t \in S, s \neq t$ ada suatu epimorfisma θ dari S ke suatu semigrup hingga T sedemikian sehingga $\theta(s) \neq \theta(t)$.

Contoh 3

Diberikan semigrup

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{Z}_3 - \{\bar{0}\} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{2} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix} \right\}$$

di bawah operasi perkalian.

I. Karena unsur di S ada 4, maka ada $C_2^4 = 6$ pasangan $\begin{bmatrix} a & b \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} c & d \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix} \in S$, yaitu $\begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} \bar{2} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{2} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix}$, dan $\begin{bmatrix} \bar{2} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix}$.

II. Untuk ke-6 pasangan yang berbeda tersebut, didefinisikan beberapa pemetaan sebagai berikut.

Pasangan Unsur Berbeda	Pemetaan
• $\begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix}$ • $\begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} \bar{2} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix}$ • $\begin{bmatrix} \bar{2} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix}$ • $\begin{bmatrix} \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix}$	Semigrup $K = \{\bar{1}, \bar{2}\}$ di bawah operasi perkalian modulo 3 merupakan semigrup hingga. Selanjutnya, definisikan pemetaan epimorfisma $\theta: S \longrightarrow K$ dengan $\theta\left(\begin{bmatrix} a & b \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix}\right) = a.$
• $\begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix}$ • $\begin{bmatrix} \bar{2} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix}$	Semigrup $L = \{\bar{0}, \bar{1}\}$ di bawah operasi perkalian modulo 3 merupakan semigrup hingga. Selanjutnya, definisikan pemetaan epimorfisma $\alpha: S \longrightarrow L$ dengan $\alpha\left(\begin{bmatrix} a & b \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix}\right) = \begin{cases} \bar{1}, & \text{jika } a = b \\ \bar{0}, & \text{jika } a \neq b \end{cases}$

Bukti:

- Untuk pemetaan $\theta: S \longrightarrow K$ yang didefinisikan dengan $\theta\left(\begin{bmatrix} a & b \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix}\right) = a$.

  Perhatikan bahwa
  - untuk $\begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix}$, maka $\theta\left(\begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix}\right) = \bar{1} \neq \bar{2} = \theta\left(\begin{bmatrix} \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix}\right)$,

- untuk $\begin{bmatrix}\bar{1} & \bar{1}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix}\bar{2} & \bar{2}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{bmatrix}$, maka $\theta\left(\begin{bmatrix}\bar{1} & \bar{1}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{bmatrix}\right) = \bar{1} \neq \bar{2} = \theta\left(\begin{bmatrix}\bar{2} & \bar{2}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{bmatrix}\right)$,
- untuk $\begin{bmatrix}\bar{2} & \bar{2}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix}\bar{1} & \bar{2}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{bmatrix}$, maka $\theta\left(\begin{bmatrix}\bar{2} & \bar{2}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{bmatrix}\right) = \bar{2} \neq \bar{1} = \theta\left(\begin{bmatrix}\bar{1} & \bar{2}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{bmatrix}\right)$,
- untuk $\begin{bmatrix}\bar{2} & \bar{1}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix}\bar{1} & \bar{2}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{bmatrix}$, maka $\theta\left(\begin{bmatrix}\bar{2} & \bar{1}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{bmatrix}\right) = \bar{2} \neq \bar{1} = \theta\left(\begin{bmatrix}\bar{1} & \bar{2}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{bmatrix}\right)$.

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa $\theta: S \longrightarrow K$ adalah homomorfisma.
Ambil sebarang $\begin{bmatrix}a & b\\ \bar{0} & \bar{0}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}c & d\\ \bar{0} & \bar{0}\end{bmatrix} \in S$, maka

$$\begin{aligned}\theta\left(\begin{bmatrix}a & b\\ \bar{0} & \bar{0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c & d\\ \bar{0} & \bar{0}\end{bmatrix}\right) &= \theta\left(\begin{bmatrix}ac & ad\\ \bar{0} & \bar{0}\end{bmatrix}\right)\\ &= ac\\ &= \theta\left(\begin{bmatrix}a & b\\ \bar{0} & \bar{0}\end{bmatrix}\right)\theta\left(\begin{bmatrix}c & d\\ \bar{0} & \bar{0}\end{bmatrix}\right)\end{aligned}$$

Jadi, θ adalah homomorfisma.
Setelah itu, akan ditunjukkan bahwa $\theta: S \longrightarrow K$ adalah fungsi pada.
Ambil sebarang $a \in K$.
Pilih $\begin{bmatrix}a & b\\ \bar{0} & \bar{0}\end{bmatrix} \in S$, maka $\theta\left(\begin{bmatrix}a & b\\ \bar{0} & \bar{0}\end{bmatrix}\right) = a$.
Jadi, $\theta: S \longrightarrow K$ adalah fungsi pada.

▪ Untuk pemetaan $\alpha: S \longrightarrow L$ yang didefinisikan dengan

$$\alpha\left(\begin{bmatrix}a & b\\ \bar{0} & \bar{0}\end{bmatrix}\right) = \begin{cases}\bar{1}, & \text{jika } a = b\\ \bar{0}, & \text{jika } a \neq b\end{cases}$$

Perhatikan bahwa

- untuk $\begin{bmatrix}\bar{1} & \bar{1}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix}\bar{1} & \bar{2}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{bmatrix}$, maka $\alpha\left(\begin{bmatrix}\bar{1} & \bar{1}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{bmatrix}\right) = \bar{1} \neq \bar{0} = \alpha\left(\begin{bmatrix}\bar{1} & \bar{2}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{bmatrix}\right)$,
- untuk $\begin{bmatrix}\bar{2} & \bar{2}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix}\bar{2} & \bar{1}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{bmatrix}$, maka $\alpha\left(\begin{bmatrix}\bar{2} & \bar{2}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{bmatrix}\right) = \bar{1} \neq \bar{0} = \alpha\left(\begin{bmatrix}\bar{2} & \bar{1}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{bmatrix}\right)$.

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa $\alpha: S \longrightarrow L$ adalah homomorfisma.
Ambil sebarang $\begin{bmatrix}a & b\\ \bar{0} & \bar{0}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}c & d\\ \bar{0} & \bar{0}\end{bmatrix} \in S$, maka

- Jika $a = b$ dan $c = d$, maka

$$\begin{aligned}\alpha\left(\begin{bmatrix}a & a\\ \bar{0} & \bar{0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c & c\\ \bar{0} & \bar{0}\end{bmatrix}\right) &= \alpha\left(\begin{bmatrix}ac & ac\\ \bar{0} & \bar{0}\end{bmatrix}\right)\\ &= \bar{1}\\ &= \bar{1}\cdot\bar{1}\\ &= \alpha\left(\begin{bmatrix}a & a\\ \bar{0} & \bar{0}\end{bmatrix}\right)\alpha\left(\begin{bmatrix}c & c\\ \bar{0} & \bar{0}\end{bmatrix}\right)\end{aligned}$$

- Jika $a = b$ dan $c \neq d$, maka

$$\begin{aligned}\alpha\left(\begin{bmatrix}a & a\\ \bar{0} & \bar{0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c & d\\ \bar{0} & \bar{0}\end{bmatrix}\right) &= \alpha\left(\begin{bmatrix}ac & ad\\ \bar{0} & \bar{0}\end{bmatrix}\right)\\ &= \bar{0}\\ &= \bar{1}\cdot\bar{0}\\ &= \alpha\left(\begin{bmatrix}a & a\\ \bar{0} & \bar{0}\end{bmatrix}\right)\alpha\left(\begin{bmatrix}c & d\\ \bar{0} & \bar{0}\end{bmatrix}\right)\end{aligned}$$

- Jika $a \neq b$ dan $c \neq d$, maka

$$\begin{aligned} \alpha\left(\begin{bmatrix} a & b \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c & d \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix}\right) &= \alpha\left(\begin{bmatrix} ac & ad \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix}\right) \\ &= \bar{0} \\ &= \bar{0}\cdot\bar{0} \\ &= \alpha\left(\begin{bmatrix} a & b \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix}\right)\alpha\left(\begin{bmatrix} c & d \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix}\right) \end{aligned}$$

Jadi, $\alpha: S \longrightarrow L$ adalah homomorfisma.
Setelah itu, akan ditunjukkan bahwa $\alpha: S \longrightarrow L$ adalah fungsi pada.
Ambil sebarang $y \in L$.

- Jika $y = \bar{1}$, maka pilih $\begin{bmatrix} a & a \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix} \in S$, sehingga $\alpha\left(\begin{bmatrix} a & a \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix}\right) = \bar{1} = y$.
- Jika $y = \bar{0}$, maka pilih $\begin{bmatrix} a & b \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix} \in S$, sehingga $\alpha\left(\begin{bmatrix} a & b \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix}\right) = \bar{0} = y$.

Jadi, α adalah fungsi pada.

Jadi, semigrup $S = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{Z}_3 - \{\bar{0}\}\right\}$ di bawah operasi perkalian adalah semigrup yang hingga secara residual.

Teorema 1 (Howie, 1995:61)
Misalkan S adalah suatu semigrup hingga. Maka S adalah kanselatif jika dan hanya jika S adalah grup.
Bukti:
($\Longrightarrow$) Anggap bahwa S adalah semigrup hingga kanselatif.
Akan dibuktikan bahwa S adalah grup.
Karena S merupakan semigrup, maka S tertutup dan assosiatif, sehingga akan ditunjukkan bahwa S memiliki identitas dan setiap anggotanya memiliki invers.

- Akan ditunjukkan S mempunyai identitas.
  Karena S adalah semigrup hingga, maka berdasarkan Proposisi 2 ada $e \in S$ yang merupakan unsur idempoten.
  Karena e adalah unsur idempoten, maka $e^2 = ee = e$.
  Akan ditunjukkan bahwa e adalah unsur identitas.
  Ambil sebarang $x \in S$.
  Perhatikan bahwa $xe = xee$ dan $ex = eex$.
  Karena S adalah kanselatif, maka $x = xe$ dan $x = ex$. Sehingga untuk sebarang $x \in S$ diperoleh
  $$xe = x = ex$$
  Sehingga e adalah unsur identitas di S.
  Jadi, S mempunyai unsur identitas.
- Akan ditunjukkan bahwa untuk sebarang unsur di S mempunyai invers.
  Karena S adalah semigrup hingga, maka S mempunyai anggota sebanyak hingga. Misalkan $S = \{x_1, x_2, \dots, x_k, \dots, x_n\}$.
  Ambil sebarang $x_k \in S$, maka $x_kS = \{x_kx_1, x_kx_2, \dots, x_kx_k, \dots x_kx_n\}$ dan
  $Sx_k = \{x_1x_k, x_2x_k, \dots, x_k, \dots, x_nx_k\}$.
  Karena S adalah semigrup hingga kanselatif, maka $x_kS = Sx_k = S$.
  Semigrup S sudah ditunjukkan mempunyai identitas, kemudian

misalkan identitas tersebut adalah x_s.
Karena $x_k S = S$ dan $x_s \in S$, maka $x_s \in x_k S$. Sehingga ada $x_t \in S$ sedemikian sehingga $x_k x_t = x_s$.
Karena x_s adalah identitas, maka

$$x_k x_t = x_s = x_t x_k.$$

Ini berarti bahwa untuk sebarang $x_k \in S$, ada $x_t \in S$ sedemikian sehingga

$$x_k x_t = x_s = x_t x_k.$$

Jadi, untuk sebarang unsur di S mempunyai invers.

Sehingga S adalah tertutup, assosiatif, mempunyai identitas dan setiap unsur memiliki invers. Jadi, semigrup S adalah grup.

($\Leftarrow$) Anggap bahwa S adalah semigrup hingga yang merupakan grup.

- Akan ditunjukkan semigrup S adalah kanselatif kanan.
  Anggap bahwa $ba = ca$.
  Karena S adalah grup, maka untuk sebarang $a \in S$ memiliki invers.
  Misalkan a^{-1} adalah invers dari a. Perhatikan bahwa
  $$b = be = b(aa^{-1}) = (ba)a^{-1} = (ca)a^{-1} = c(aa^{-1}) = ce = c$$
- Akan ditunjukkan semigrup S adalah kanselatif kiri.
  Anggap bahwa $ab = ac$.
  Karena S adalah grup, maka untuk sebarang $a \in S$ memiliki invers.
  Misalkan a^{-1} adalah invers dari a.
  Perhatikan bahwa
  $$b = eb = (a^{-1}a)b = a^{-1}(ab) = a^{-1}(ac) = (a^{-1}a)c = ec = c$$

Jadi, semigrup S adalah kanselatif.

Gabungan Dua Semigrup Hingga dan Sifat-Sifatnya

Misalkan $(S,*)$ dan $(T,\ \cdot)$ adalah semigrup hingga yang saling asing (*disjoint*). Didefinisikan operasi biner $\circledast$ pada $S \cup T$ sebagai berikut:

$$a \circledast b := \begin{cases} a * b & , \text{ jika } a, b \in S \\ a \cdot b & , \text{ jika } a, b \in T \\ b & , \text{ jika } a \in S, b \in T \\ a & , \text{ jika } b \in S, a \in T \end{cases}$$

Berdasarkan operasi biner pada $S \cup T$ yang telah didefinisikan, akan dibuktikan bahwa $S \cup T$ dengan definisi operasi biner tersebut adalah semigrup.

Lemma 1
Jika S dan T adalah semigrup hingga dan $S \cap T = \emptyset$, maka $S \cup T$ adalah semigrup hingga.
Bukti:
Anggap bahwa S dan T adalah semigrup.
Akan ditunjukkan $S \cup T$ adalah semigrup
Ambil sebarang $a, b, c \in S \cup T$.

S	T	Sifat Asosiatif
a, b, c	$-$	Karena S adalah semigrup, maka berlaku sifat asosiatif
a, b	c	$a(bc) = ac = c = (ab)c$
a, c	b	Karena $a(bc) = ab = b$ dan $(ab)c = bc = b$, maka $a(bc) = b = (ab)c$
b, c	a	Karenaa $a(bc) = a$ dan $(ab)c = ac = a$, maka $a(bc) = a = (ab)c$
a	b, c	$a(bc) = bc = (ab)c$
b	a, c	$a(bc) = ac = (ab)c$
c	a, b	$a(bc) = ab = (ab)c$
$-$	a, b, c	Karena T adalah semigrup, maka berlaku sifat asosiatif

Ini berarti pada $S \cup T$ berlaku sifat asosiatif. Sehingga $S \cup T$ adalah semigrup. Karena S dan T adalah hingga, maka $S \cup T$ juga hingga. Sehingga, $S \cup T$ adalah semigrup hingga.

Contoh 4

- $S = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ \overline{0} & \overline{0} \end{bmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{Z}_3 - \{\overline{0}\}\right\} = \left\{\begin{bmatrix} \overline{1} & \overline{1} \\ \overline{0} & \overline{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \overline{1} & \overline{2} \\ \overline{0} & \overline{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \overline{2} & \overline{1} \\ \overline{0} & \overline{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \overline{2} & \overline{2} \\ \overline{0} & \overline{0} \end{bmatrix}\right\}$ adalah semigrup di bawah operasi perkalian.
- Semigrup $T = \{a, b, c\}$ di bawah operasi perkalian yang didefinisikan sebagai berikut.

$\cdot$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	a	c
c	c	b	c

- $S \cap T = \emptyset$

  $S \cup T = \left\{\begin{bmatrix} \overline{1} & \overline{1} \\ \overline{0} & \overline{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \overline{1} & \overline{2} \\ \overline{0} & \overline{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \overline{2} & \overline{1} \\ \overline{0} & \overline{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \overline{2} & \overline{2} \\ \overline{0} & \overline{0} \end{bmatrix}, a, b, c\right\}$

  Operasi biner pada $S \cup T$ adalah sebagai berikut.

	$\begin{bmatrix} \overline{1} & \overline{1} \\ \overline{0} & \overline{0} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \overline{1} & \overline{2} \\ \overline{0} & \overline{0} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \overline{2} & \overline{1} \\ \overline{0} & \overline{0} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \overline{2} & \overline{2} \\ \overline{0} & \overline{0} \end{bmatrix}$	a	b	c
$\begin{bmatrix} \overline{1} & \overline{1} \\ \overline{0} & \overline{0} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \overline{1} & \overline{1} \\ \overline{0} & \overline{0} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \overline{1} & \overline{2} \\ \overline{0} & \overline{0} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \overline{2} & \overline{1} \\ \overline{0} & \overline{0} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \overline{2} & \overline{2} \\ \overline{0} & \overline{0} \end{bmatrix}$	a	b	c
$\begin{bmatrix} \overline{1} & \overline{2} \\ \overline{0} & \overline{0} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \overline{1} & \overline{1} \\ \overline{0} & \overline{0} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \overline{1} & \overline{2} \\ \overline{0} & \overline{0} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \overline{2} & \overline{1} \\ \overline{0} & \overline{0} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \overline{2} & \overline{2} \\ \overline{0} & \overline{0} \end{bmatrix}$	a	b	c
$\begin{bmatrix} \overline{2} & \overline{1} \\ \overline{0} & \overline{0} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \overline{2} & \overline{2} \\ \overline{0} & \overline{0} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \overline{2} & \overline{1} \\ \overline{0} & \overline{0} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \overline{1} & \overline{2} \\ \overline{0} & \overline{0} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \overline{1} & \overline{1} \\ \overline{0} & \overline{0} \end{bmatrix}$	a	b	c
$\begin{bmatrix} \overline{2} & \overline{2} \\ \overline{0} & \overline{0} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \overline{2} & \overline{2} \\ \overline{0} & \overline{0} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \overline{2} & \overline{1} \\ \overline{0} & \overline{0} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \overline{1} & \overline{2} \\ \overline{0} & \overline{0} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \overline{1} & \overline{1} \\ \overline{0} & \overline{0} \end{bmatrix}$	a	b	c
a	a	a	a	a	a	b	c
b	b	b	b	b	b	a	c
c	c	c	c	c	c	b	c

Lemma 2
Diketahui T adalah semigrup hingga dengan unsur identitas e. Jika S adalah semigrup hingga dan $S \cap T = \emptyset$, maka $S \cup \{e\}$ adalah semigrup hingga.
Bukti:
Karena S dan $\{e\}$ adalah semigrup hingga dan $S \cap \{e\} = \emptyset$, maka berdasarkan Lemma 1, $S \cup \{e\}$ adalah semigrup hingga.

Teorema 2 (Menisker, 2013)
Misalkan S dan T adalah semigrup hingga. Maka S dan T adalah semigrup periodik jika dan hanya jika $S \cup T$ merupakan semigrup periodik.
Bukti:
($\Longrightarrow$) Anggap bahwa S dan T keduanya semigrup hingga yang periodik.
Akan ditunjukkan $S \cup T$ periodik.
Ambil sebarang $x \in S \cup T$.
Akan ditunjukkan $x^m = x^n$, untuk suatu $m \neq n \in \mathbb{N}$.
Perhatikan bahwa $x \in S \cup T$ berarti $x \in S$ atau $x \in T$ (tidak mungkin $x \in S \cap T$, karena $S \cap T = \emptyset$).

- Jika $x \in S$
  Karena S adalah semigrup periodik, maka ada $a \neq b \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $x^a = x^b$.
- Jika $x \in T$
  Karena T adalah semigrup periodik, maka ada $c \neq d \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $x^c = x^d$.

Ini berarti bahwa untuk setiap $x \in S \cup T$, ada $m \neq n \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $x^m = x^n$.
Jadi, $S \cup T$ periodik.
($\Longleftarrow$) Anggap bahwa $S \cup T$ periodik.
Akan ditunjukkan S dan T periodik.

- Akan dibuktikan bahwa S periodik.
  Ambil sebarang $y \in S$.
  Karena $S \subseteq S \cup T$, maka $y \in S \cup T$.
  Karena $S \cup$ T periodik, maka ada $k \neq l \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga $y^k = y^l$.
  Jadi, S periodik.
- Akan dibuktikan bahwa T periodik.
  Ambil sebarang $z \in T$.
  Karena $T \subseteq S \cup T$, maka $z \in S \cup T$.
  Karena $S \cup$ T periodik, maka ada $p \neq q \in N$ sedemikian sehingga $z^p = z^q$.
  Jadi, T periodik.

Jadi, S dan T periodik.

Contoh 4

- Semigrup $S = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{Z}_3 - \{\bar{0}\} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{2} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix} \right\}$ di bawah operasi perkalian adalah periodik (berdasarkan Contoh 1).

- Semigrup $T = \{a, b, c\}$ di bawah operasi perkalian yang didefinisikan sebagai berikut.

$\cdot$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	a	c
c	c	b	c

  adalah periodik.
  Bukti:
  Perhatikan bahwa
  $$a^2 = a = a^3,\ \ b^2 = a = b^4,\ \text{dan } c^2 = c = c^3.$$
  Ini berarti $T = \{a, b, c\}$ dengan operasi perkalian yang didefinisikan tersebut adalah periodik.

- Akan dibuktikan bahwa $S \cup T = \left\{\begin{bmatrix}\bar{1} & \bar{1}\\ 0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\bar{1} & \bar{2}\\ 0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\bar{2} & \bar{1}\\ 0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\bar{2} & \bar{2}\\ 0 & 0\end{bmatrix}, a, b, c\right\}$ adalah semigrup periodik
  Bukti:
  Perhatikan bahwa
  - $\begin{bmatrix}\bar{1} & \bar{1}\\ 0 & 0\end{bmatrix}^1 = \begin{bmatrix}\bar{1} & \bar{1}\\ 0 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\bar{1} & \bar{1}\\ 0 & 0\end{bmatrix}^2,$
  - $\begin{bmatrix}\bar{1} & \bar{2}\\ 0 & 0\end{bmatrix}^1 = \begin{bmatrix}\bar{1} & \bar{2}\\ 0 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\bar{1} & \bar{2}\\ 0 & 0\end{bmatrix}^2,$
  - $\begin{bmatrix}\bar{2} & \bar{1}\\ 0 & 0\end{bmatrix}^1 = \begin{bmatrix}\bar{2} & \bar{1}\\ 0 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\bar{2} & \bar{1}\\ 0 & 0\end{bmatrix}^3,$
  - $\begin{bmatrix}\bar{2} & \bar{2}\\ 0 & 0\end{bmatrix}^1 = \begin{bmatrix}\bar{2} & \bar{2}\\ 0 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\bar{2} & \bar{2}\\ 0 & 0\end{bmatrix}^3,$
  - $a^2 = a = a^3,$
  - $b^2 = a = b^4,$
  - $c^2 = c = c^3.$

  Jadi, $S \cup T$ periodik.

Teorema 3 (Menisker, 2013)
Diketahui S dan T adalah semigrup hingga. Maka $S \cup T$ merupakan semigrup hingga secara residual jika dan hanya jika S dan T adalah semigrup hingga secara residual.
Bukti:
($\Longrightarrow$) Anggap bahwa $S \cup T$ adalah semigrup hingga secara residual.
Karena $S \cup T$ adalah hingga secara residual, maka untuk sebarang pasangan $x, y \in S \cup T, x \neq y$ ada suatu semigrup hingga $A_{x \neq y}$ dan suatu epimorfisma $\theta_{x \neq y}: S \cup T \longrightarrow A_{x \neq y}$, sedemikian hingga $\theta_{x \neq y}(x) \neq \theta_{x \neq y}(y)$. Dengan kata lain

(i) Jika $x, y \in S, x \neq y$ maka ada suatu semigrup hingga $A_{x \neq y}$ dan suatu epimorfisma $\theta_{x \neq y}: S \cup T \longrightarrow A_{x \neq y}$, sedemikian hingga
$$\theta_{x \neq y}(x) \neq \theta_{x \neq y}(y).$$
(ii) Jika $x, y \in T, x \neq y$ maka ada suatu semigrup hingga $A_{x \neq y}$ dan suatu epimorfisma $\theta_{x \neq y}: S \cup T \longrightarrow A_{x \neq y}$, sedemikian hingga
$$\theta_{x \neq y}(x) \neq \theta_{x \neq y}(y).$$

(iii) Jika $x \in S$ dan $y \in T$, $s \neq t$ maka ada suatu semigrup hingga $A_{x\neq y}$ dan suatu epimorfisma $\theta_{x\neq y}: S \cup T \longrightarrow A_{x\neq y}$, sedemikian hingga

$$\theta_{x\neq y}(x) \neq \theta_{x\neq y}(y).$$

- Akan dibuktikan S adalah semigrup hingga secara residual
  Ambil sebarang $x, y \in S, x \neq y$.
  Karena S adalah subsemigrup dari $S \cup T$ dan $\theta_{x\neq y}$ adalah homomorfisma, maka $\theta_{x\neq y}(S)$ adalah subsemigrup dari $A_{x\neq y}$.
  Karena $\theta_{x\neq y}(S)$ adalah subsemigrup dari $A_{x\neq y}$ dan $A_{x\neq y}$ adalah hingga, maka $\theta_{x\neq y}(S)$ adalah hingga.
  Sehingga $\theta_{x\neq y}(S)$ adalah semigrup hingga.
  Selanjutnya, definisikan pemetaan $\mu_{x\neq y}:\ S \longrightarrow \theta_{x\neq y}(S)$, dengan

  $$\mu_{x\neq y}(x) = \theta_{x\neq y}(x).$$

  - Akan ditunjukkan $\mu_{x\neq y}(x) \neq \mu_{x\neq y}(y)$
    Perhatikan bahwa

    $$\mu_{x\neq y}(x) = \theta_{x\neq y}(x) \neq \theta_{x\neq y}(y) = \mu_{x\neq y}(y)\ .$$

  - Akan ditunjukkan $\mu_{x\neq y}$ adalah suatu homomorfisma.
    Ambil sebarang $a, b \in S$.
    Perhatikan bahwa

    $$\begin{aligned} \mu_{x\neq y}(ab) &= \theta_{x\neq y}(ab) \\ &= \theta_{x\neq y}(a)\theta_{x\neq y}(b) \\ &= \mu_{x\neq y}(a)\mu_{x\neq y}(b) \end{aligned}$$

    Jadi, $\mu_{x\neq y}$ adalah homomorfisma.
  - Akan ditunjukkan $\mu_{x\neq y}$ adalah fungsi pada.
    Ambil sebarang $p \in \theta_{x\neq y}(S)$, maka $p = \theta_{x\neq y}(r)$ untuk suatu $r \in S$, sehingga

    $$\mu_{x\neq y}(r) = \theta_{x\neq y}(r) = p.$$

    Jadi, $\mu_{x\neq y}$ adalah fungsi pada.

  Jadi, S adalah semigrup yang hingga secara residual.
- Bukti untuk semigrup T hingga secara residual analog dengan bukti dari semigrup S hingga secara residual.

($\Longleftarrow$) Anggap bahwa S dan T adalah semigrup yang hingga secara residual.
Akan dibuktikan bahwa $S \cup T$ adalah semigrup yang hingga secara residual.
Karena S hingga secara residual, maka untuk sebarang pasangan $x, y \in S, x \neq y$ ada suatu semigrup hingga $A_{x\neq y}$ dan epimorfisma $\alpha_{x\neq y} : S \longrightarrow A_{x\neq y}$ sedemikian hingga $\alpha_{x\neq y}(x) \neq \alpha_{x\neq y}(y)$.
Selanjutnya, ambil sebarang $x, y \in S \cup T$ dengan $x \neq y$.

Kasus 1: $x, y \in S$
Perhatikan bahwa $A_{x\neq y} \cup \{e\}$, dimana e merupakan identitas di T adalah suatu semigrup. Definisikan pemetaan $\theta_{x\neq y}: S \cup T \longrightarrow A_{x\neq y} \cup \{e\}$ dengan

$$\theta_{x\neq y}(k) = \begin{cases} \alpha_{x\neq y}(k)\,, & \text{jika } \ k \in S \\ \\ \quad e \ \ , & \text{jika } \ k \in T \end{cases}$$

- Akan ditunjukkan $\theta_{x\neq y}(x) \neq \theta_{x\neq y}(y)$.

Karena $x, y \in S$ dan $x \neq y$, maka $\alpha_{x\neq y}(x) \neq \alpha_{x\neq y}(y)$, sehingga

$$\theta_{x\neq y}(x) = \alpha_{x\neq y}(x) \neq \alpha_{x\neq y}(y) = \theta_{x\neq y}(y).$$

- Akan ditunjukkan $\theta_{x\neq y}$ adalah suatu homomorfisma.
  Ambil sebarang $p, q \in S \cup T$.
  - Jika $p, q \in S$, maka

$$\begin{aligned} \theta_{x\neq y}(pq) &= \alpha_{x\neq y}(pq) \\ &= \alpha_{x\neq y}(p)\alpha_{x\neq y}(q) \\ &= \theta_{x\neq y}(p)\theta_{x\neq y}(q). \end{aligned}$$

  - Jika $p, q \in T$, maka

$$\begin{aligned} \theta_{x\neq y}(pq) &= e \\ &= e \cdot e \\ &= \theta_{x\neq y}(p)\theta_{x\neq y}(q). \end{aligned}$$

  - Jika $p \in S$ dan $q \in T$, maka

$$\begin{aligned} \theta_{x\neq y}(pq) &= \theta_{x\neq y}(q) \\ &= e \\ &= \alpha_{x\neq y}(p) \cdot e \\ &= \theta_{x\neq y}(p)\theta_{x\neq y}(q). \end{aligned}$$

  Jadi, $\theta_{x\neq y}$ adalah homomorfisma.
- Akan ditunjukkan $\theta_{x\neq y}$ adalah fungsi pada.
  Ambil sebarang $a \in A_{x\neq y} \cup \{e\}$.
  Akan ditunjukkan bahwa ada $b \in S \cup T$ sedemikian hingga $\theta_{x\neq y}(b) = a$.
  - Jika $a \in A_{x\neq y}$.
    Karena $a \in A_{x\neq y}$ dan $\alpha_{x\neq y}: S \longrightarrow A_{x\neq y}$ adalah fungsi pada, maka ada suatu $b \in S$ sedemikian hingga $\alpha_{x\neq y}(b) = a$.
    Pilih $b \in S \subseteq S \cup T$, maka

$$\theta_{x\neq y}(b) = \alpha_{x\neq y}(b) = a.$$

  - Jika $a \in \{e\}$, berarti $a = e$.
    Pilih $b \in T \subseteq S \cup T$, maka $\theta_{x\neq y}(b) = e$.

  Jadi, $\theta_{x\neq y}$ adalah fungsi pada.

Kasus 2: $x, y \in T$
Bukti untuk $x, y \in T$ analog dengan S.

Kasus 3: $x \in S$ dan $y \in T$ (jadi $x \neq y$)
$R_2 = \{a, b\}$ adalah semigrup nol kanan dengan 2 anggota dan $ab = b$, $ba = a$.
Definisikan pemetaan $\mu_{x\neq y}: S \cup T \longrightarrow R_2 = \{a, b\}$ sebagai berikut

$$\mu_{x\neq y}(p) = \begin{cases} a\ , & \text{jika } p \in S \\ b\ , & \text{jika } p \in T \end{cases}$$

- Akan ditunjukkan $\mu_{x\neq y}(x) \neq \mu_{x\neq y}(y)$.
  Perhatikan bahwa

$$\mu_{x\neq y}(x) = a \neq b = \mu_{x\neq y}(y).$$

- Akan ditunjukkan $\mu_{x\neq y}$ adalah suatu homomorfisma.
  Ambil sebarang $s, t \in S \cup T$.
  - Jika $s, t \in S,$ maka
    $$\mu_{x\neq y}(st) = a = a \cdot a = \mu_{x\neq y}(s)\mu_{x\neq y}(t).$$
  - Jika $s, t \in T$, maka
    $$\mu_{x\neq y}(st) = b = b \cdot b = \mu_{x\neq y}(s)\mu_{x\neq y}(t).$$
  - Jika $s \in S$ dan $t \in T$, maka
    $$\mu_{x\neq y}(st) = \mu_{x\neq y}(t) = b = a \cdot b = \mu_{x\neq y}(s)\mu_{x\neq y}(t).$$

  Jadi, $\mu_{x\neq y}$ adalah homomorfisma.
- Akan ditunjukkan $\mu_{x\neq y}$ adalah fungsi pada.
  Ambil sebarang $r \in R_2$.
  Akan ditunjukkan bahwa ada $s \in S \cup T$ sedemikian hingga $\mu_{x\neq y}(s) = r$.
  - Jika $r = a$
    Pilih $s \in S \subseteq S \cup T$, maka $\mu_{x\neq y}(s) = a = r$.
  - Jika $r = b$
    Pilih $t \in T \subseteq S \cup T$, maka $\mu_{x\neq y}(t) = b = r$.

  Jadi, $\mu_{x\neq y}$ adalah fungsi pada.

Jadi, $\mu_{x\neq y}: S \cup T \longrightarrow R_2 = \{a, b\}$ juga berlaku jika R_2 adalah semigrup nol kiri dengan 2 anggota dan $ab = a, ba = b$.
Jadi, semigrup $S \cup T$ adalah hingga secara residual.

PENUTUP
Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan yang telah dipaparkan, dapat disimpulkan bahwa:

1. Beberapa sifat dari semigrup hingga adalah sebagai berikut:
   a. Semigrup hingga adalah semigrup periodik.
   b. Misalkan S adalah semigrup hingga. Maka untuk sebarang $x \in S$ ada $n \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga
   $$x^n = x^n x^n$$
   c. Setiap semigrup hingga mempunyai unsur idempoten.
   d. Semigrup hingga adalah semigrup yang hingga secara residual.
   e. Misalkan S adalah suatu semigrup hingga. Maka S adalah kanselatif jika dan hanya jika S adalah grup.
2. Misalkan $(S,*)$ dan $(T, \cdot)$ adalah semigrup hingga yang saling asing (*disjoint*). Didefinisikan operasi biner $\circledast$ pada $S \cup T$ sebagai berikut:
   $$a \circledast b := \begin{cases} a * b & , \text{ jika } a, b \in S \\ a \cdot b & , \text{ jika } a, b \in T \\ b & , \text{ jika } a \in S, b \in T \\ a & , \text{ jika } b \in S, a \in T \end{cases}$$
   Himpunan $S \cup T$ dengan operasi biner yang telah didefinisikan tersebut adalah suatu semigrup. Beberapa sifat dari semigrup $S \cup T$ tersebut adalah sebagai berikut:
   a. Misalkan S dan T adalah semigrup hingga. Maka S dan T adalah semigrup periodik jika dan hanya jika $S \cup T$ merupakan semigrup periodik.

b. Diketahui S dan T adalah semigrup hingga. Maka $S \cup T$ merupakan semigrup hingga secara residual jika dan hanya jika S dan T adalah semigrup hingga secara residual.

Saran

Sifat-sifat semigrup hingga yang dibahas dalam penulisan ini masih belum semuanya, sehingga bisa dikembangkan lebih jauh lagi untuk sifat-sifat semigrup hingga yang tidak dibahas dalam penulisan ini. Selain itu, sifat-sifat semigrup hingga juga bisa dikembangkan lebih jauh lagi untuk golongan-golongan berbeda dari semigrup, misalnya semigrup monoid, semigrup *band*, semigrup sederhana, semigrup *semilattice,* dan lain-lain.

DAFTAR RUJUKAN

Almeida, J. 1994. *Finite Semigroups and Universal Algebra*. USA: Word Scientific.

Ayik, H. 2005. On Finiteness Condition for Rees Matrix Semigroup. *Czechoslovak Mathematical Journal*, 55(2). (Online), (http://dml.cz/bitstream/handle/10338.dmlcz/127991/CzechMathJ_55-2005-2_15.pdf), diakses 26 Januari 2015.

Bartle, R.G dan Sherbert, D.R. 2000. *Introduction to Real Analysis* (edisi ke-3). New York: John Wiley and Sons.

Clifford, A.H dan Preston, G.B. 1961. *The Algebraic Theory of Semigroups* (volume 1). USA: American Mathematical Society.

Gallian, J. A. 2010. *Contemporary Abstract Algebra.* USA: Brooks/Cole.

Gilbert, J dan Gilbert, L. 2009. *Elements of Modern Algebra.* USA: Brooks/Cole.

Harju, T. 1996. *Semigroups.* (Online), (http://users.utu.fi/harju/semigroups/semigroups.pdf), diakses 10 Maret 2015.

Howie, J.M. 1995. *Fundamental of Semigroup Theory.* United States: Oxford University.

Hungerford, T.W. 1974. *Graduate Texts in Mathematics: Algebra.* New York: Springer-Verlag.

Minisker, M. 2013. Finiteness Conditions for Unions of Two Semigroup and Ranks of $B(G, n)$. *European Journal of Pure and Applied Mathematics,* 6(3). (Online), (http://www.ejpam.com/index.php/ejpam/article/download/1809/306), diakses 10 April 2014.

Roman, S. 2010. *Fundamental of Group Theory.* New York: Springer Science.